

Haar 웨이블릿을 이용한 선형시스템의 상태해석에 관한 연구

Study for State Analysis of Linear Systems using Haar Wavelet

김 범 수, 심 일 주*
(Beom-Soo Kim and Il-Joo Shim)

Abstract : In this paper Haar functions are developed to approximate the solutions of continuous time linear system. Properties of Haar functions are first presented, and an explicit expression for the inverse of the Haar operational matrix is presented. Using the inverse of the Haar operational matrix the full order Stein equation should be solved in terms of the solutions of pure algebraic matrix equations, which reduces the computation time remarkably. Finally a numerical example is illustrated to demonstrate the validity of the proposed algorithm.

Keywords : linear system, haar wavelet, stein equation

I. 서론

웨이블릿은 함수 및 수치해석과 같은 수학 분야뿐만 아니라 물리, 지구과학, 생물학 등의 자연과학, 그리고 일반 공학 분야와 경제학 등 많은 분야에 걸쳐 사용되고 있는 수학적 해석 방법론중의 하나이다. 시스템의 신호를 효율적으로 처리하기 위한 방법 중의 하나는 잘 정의된 기저함수로 주어진 신호를 재구성하는 것이다. 웨이블릿 기저 함수들은 푸리에 방법과는 달리 주어진 함수를 시간과 주파수 영역 양쪽에서 국부성(localization)을 잘 나타낼 수 있는 특징이 있기에 통계적 특성이나 시간적으로 예측할 수 없는 불확정(nonstationary) 신호 또는 공간적으로 불균일한(inhomogeneous) 신호 처리에 있어서 유용하다[1]. 최근 웨이블릿을 이용한 동적 시스템 문제를 해결하고자 하는 연구가 활발히 진행되고 있다 [2-6]. 이는 주어진 시간 함수를 웨이블릿 직교 기저 함수와 이 함수를 적분한 것으로 재구성함으로써 미분 또는 편미분 방정식을 대수 방정식 문제로 변환한 후 해를 구하는 것이다 [2,4,7,8].

Haar 웨이블릿은 직교 웨이블릿 중에서 가장 간단한 형태로서 1910년 A. Haar[9]에 의해 소개된 Haar 함수로 구성되어 있는데 이를 선형 미분 방정식으로 표현된 동적 시스템에 적용할 수 있는 계기는 Haar 직교 기저 함수들의 적분 함수를 구한 후 이 함수들을 이산화한 Haar 함수 행렬 및 적분 연산 행렬들의 재귀적 관계를 표현함으로써 해상도가 증가해도 Haar 함수 행렬 및 적분 연산 행렬들을 쉽게 구할 수 있음을 보임에 있다[2-4]. 따라서 Haar 웨이블릿을 선형 동적 시스템에 적용하면 선형 미분 방정식의 해를 구하는 문제는 상태 방정식이 Stein 방정식 문제로 변환되어 단순 대수 방정식의 문제로 귀결된다. 그러나 해상도가 증가할수록 Haar 함수 행렬 및 적분 연산 행렬의 차원은 2의 멱수로 증가하게 되므로 이는 매우 많은 계산량과 저장공간을 필요로 한다. Chen-Hsiao는 Haar 함수 행렬 구조의 특수성 및 재귀적 관계를 이용하여 Stein 방정식을 차원이 각각 반씩 줄어든 대수 행렬

방정식과 Stein 방정식으로 분리하는 반복적 기법을 이용하여 행렬의 차원을 계속 줄여 나간 후 저차의 방정식에서 해를 구한 것들을 합성함으로써 전체 해를 구하는 알고리즘을 제시하였다[2]. 그런데 Chen-Hsiao의 방법에서는 Stein 방정식을 분리할 때마다 저차의 대수 행렬 및 Stein 방정식의 해를 구하기 위해서는 역행렬을 구하는 과정을 반복해야 한다.

[2]에서 제시된 Chen-Hsiao 방법은 선형 지연 시스템[10], 선형 시스템 시변 시스템에서의 최적제어 문제[11], 동적 시스템에서의 최적화 문제[12], 그리고 쌍일차 시스템에서의 파라미터 추정 문제[13] 등 많은 결과가 보고되고 있다. 그런데 [2]에서 다룬 선형 시불변 시스템을 제외하고는 상기 시스템에 Haar 웨이블릿을 이용하여 유도된 선형 행렬 방정식이 [2]에서 유도된 Stein 방정식과 다른 구조를 갖게 되는데 이때 적분 연산 행렬을 이용하여도 재귀적으로 분할하기가 어렵기 때문이다. 따라서 실제 해에 매우 근접한 해를 구하기 위해서는 Haar 웨이블릿의 해상도를 높여야 하고 이는 매우 많은 계산량을 필요로 한다.

본 연구에서는 해상도 증가시 적분 연산 역행렬을 이전 해상도에서의 Haar 함수 행렬 및 적분 연산 행렬들로 해석적으로 표현할 수 있음을 증명함으로써 적분 연산 행렬의 역행렬을 재귀적으로 쉽게 구할 수 있음을 보인다. 그리고 적분 연산 역행렬과 변수 치환을 이용하여 Stein 방정식을 웨이블릿의 해상도를 n 이라 할 때 2^n 개의 대수 방정식으로만 변환한 후 여기서 구한 해를 합성하여 전체 해를 구하는 방법을 제시한다. 따라서 제시된 방법은 2^n 개의 대수 방정식만을 풀므로써 계산량을 줄이고 전체 해를 쉽게 구할 수 있다.

II. Haar 웨이블릿

제곱적분 가능한 공간 $L_2(R)$ 에 속하는 임의의 함수는 직교 기저 함수들로 구성된 웨이블릿의 무한급수로 나타낼 수 있다. 웨이블릿은 $L_2(R)$ 공간에서 상호 직교인 척도함수 (scaling function) 와 모웨이블릿(mother wavelet)으로부터 척도 함수를 평행이동(translation)하고 모웨이블릿을 척도구성(dilation)과 평행 이동하여 구성된 기저 함수들의 집합이다. Haar 웨이블릿은 직교 웨이블릿 중 가장 간단한 형태인 Haar 함수로 구성되어 있으며 유한 구간 내에서 크기가 ± 1 이고

* 책임저자(Corresponding Author)

논문접수 : 2008. 3. 7., 채택확정 : 2008. 5. 28.

김범수 : 경상대학교 기계항공공학부, 해양산업연구소

(kimbs@gsnu.ac.kr)

심일주 : 대림대학 자동화시스템과(ijshim@daelim.ac.kr)

그 외의 구간에서는 0인 구형파의 집합이다. Haar 웨이블릿의 척도함수 $h_0(t)$ 와 모웨이블릿 $h_1(t)$ 은 각각 (1), (2)와 같다.

$$h_0(t) = \begin{cases} 1 & t \in [0, 1) \\ 0 & t \notin [0, 1) \end{cases} \quad (1)$$

$$h_1(t) = \begin{cases} 1 & t \in [0, \frac{1}{2}) \\ -1 & t \in [\frac{1}{2}, 1) \\ 0 & t \notin [0, 1) \end{cases} \quad (2)$$

나머지 기저 함수들은 (3)과 같이 모웨이블릿에 척도구성과 평행이동을 취하여 구한다.

$$h_k(t) = h_1(2^n t - m) = \begin{cases} 1 & t \in [t_a, t_b) \\ -1 & t \in [t_b, t_c) \\ 0 & t \notin [t_a, t_c) \end{cases} \quad (3)$$

여기서 $k = 2^n + m$ 이고 정수 $n \geq 1$ 과 $0 \leq m < 2^n$ 은 각각 척도구성 및 평행이동 모수이고 시간 경계 구간은 다음과 같이 주어진다.

$$t_a = \frac{m}{2^n}, \quad t_b = \frac{0.5+m}{2^n}, \quad t_c = \frac{1+m}{2^n}$$

(1)에서 Haar 함수의 받침(support)이 $[0, 1)$ 이므로 $L_2([0, 1))$ 공간에 속하는 제곱적분 가능한 함수 $y(t)$ 는 (4)와 같이 (1)-(3)에서 정의된 Haar 기저 함수들의 선형 결합으로 표현 할 수 있다.

$$y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k h_k(t) \quad (4)$$

여기서 Haar 계수 c_k 들은 Haar 함수가 직교기저 함수이므로 $y(t)$ 와 Haar 함수와의 내적으로 유일하게 구해진다.

$$c_k = \langle y(t), h_k(t) \rangle = 2^n \int_0^1 y(t) h_k(t) dt \quad (5)$$

(4)에서 무한 급수로 전개된 $y(t)$ 를 해상도 n 수준, 즉 $w (= 2^n)$ 개의 Haar 함수로 근사화 시키면 다음과 같이 벡터 형태로 표현할 수 있다.

$$y(t) = \sum_{k=0}^{w-1} c_k h_k(t) = \mathbf{E}_w^T \Phi_w(t) \quad (6)$$

여기서 Haar 함수 계수 벡터 \mathbf{E}_w 과 Haar 함수 벡터 $\Phi_w(t)$ 는 다음과 같이 정의 된다.

$$\mathbf{E}_w = [c_0 \quad c_1 \quad c_2 \quad \dots \quad c_{w-1}]^T \quad (7)$$

$$\Phi_w(t) = [h_0(t) \quad h_1(t) \quad h_2(t) \quad \dots \quad h_{w-1}(t)]^T$$

여기서 T 는 행렬의 전치를 뜻한다. (7)에서 정의된 Haar 함수 벡터 $\Phi_w(t)$ 를 적분한 함수를 다시 Haar 기저 함수의 급수로 표현하면 다음과 같다.

$$\int_0^1 \Phi_w(\tau) d\tau = \mathbf{P}_w \Phi_w(t) \quad (8)$$

(8)에서 \mathbf{P}_w 은 $w \times w$ 차원을 갖는 적분 연산 행렬(operational

matrix)로서 다음과 같은 재귀적 특성을 갖는다[2,3].

$$\mathbf{P}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$\mathbf{P}_w = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{\frac{w}{2}} & -\frac{1}{2w} \mathbf{H}_{\frac{w}{2}} \\ \frac{1}{2w} \mathbf{H}_{\frac{w}{2}}^{-1} & \mathbf{0}_{\frac{w}{2}} \end{bmatrix}$$

여기서 $\mathbf{0}_{\frac{w}{2}}$ 은 $\frac{w}{2} \times \frac{w}{2}$ 차원을 갖는 영 행렬이고, Haar 행렬 \mathbf{H}_w 는 받침 구간을 w 개의 균등한 시간 간격에서 Haar 함수 $h_k(t)$ 를 이산화한 벡터를 열 벡터로 갖는 $w \times w$ 정방 행렬로서 다음과 같이 정의된다.

$$\mathbf{H}_w = [\Phi_w(t_0) \quad \Phi_w(t_1) \quad \dots \quad \Phi_w(t_{w-1})] \quad (10)$$

여기서 $\frac{i}{w} \leq t_i \leq \frac{i+1}{w}$, $0 \leq i \leq w-1$ 이고 Haar 행렬은 다음과 같이 재귀적 관계를 갖는다[2].

$$\mathbf{H}_w = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{\frac{w}{2}} \otimes [1 \quad 1] \\ \mathbf{I}_{\frac{w}{2}} \otimes [1 \quad -1] \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H}_1 = [1] \quad (11)$$

여기서 $\mathbf{I}_{\frac{w}{2}}$ 은 $\frac{w}{2} \times \frac{w}{2}$ 차원을 갖는 단위 행렬이고 \otimes 는 Kronecker 곱을 나타낸다. 그리고 Haar 행렬의 역행렬은 다음과 같다[2].

$$\mathbf{H}_w^{-1} = \frac{1}{w} \mathbf{H}_w^T \mathbf{Q}_w \quad (12)$$

여기서

$$\mathbf{Q}_w = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_2 & & & 0 \\ & 2\mathbf{I}_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 2^{p-1} \mathbf{I}_{2^{p-1}} \end{bmatrix}$$

인 대각 행렬이고 $p = \log_2 w$ 이다.

예를 들어, 해상도가 $n=2$ 일 경우 Haar 행렬과 적분 연산 행렬은 다음과 같다.

$$\mathbf{H}_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad (13)$$

$$\mathbf{P}_4 = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 8 & -4 & -2 & -2 \\ 4 & 0 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

정리 1: (9)에서 정의된 Haar 연산 행렬 \mathbf{P}_w 의 역행렬은 다음과 같다[4].

$$\mathbf{P}_w^{-1} = \begin{bmatrix} 0_{\frac{w}{2}} & 2w \mathbf{H}_{\frac{w}{2}} \\ -2w \mathbf{H}_{\frac{w}{2}}^{-1} & 4w^2 \mathbf{H}_{\frac{w}{2}}^{-1} \mathbf{P}_{\frac{w}{2}} \mathbf{H}_{\frac{w}{2}} \end{bmatrix} \quad (14)$$

증명: $w=2$ 일 경우 \mathbf{P}_2 는 (9)에 의해서 정칙(nonsingular) 행렬이다. $w (= 2^n)$ 을 4, 8, .. 과 같이 2의 멱수로 증가 시킬

때 각 w 에 대해서 \mathbf{P}_w 는 첫번째 부분 행렬 $\mathbf{P}_{\frac{w}{2}}$ 와 직교함수인 Haar 행렬로 구성되므로 정칙 행렬이다. 따라서 \mathbf{P}_w 의 역행렬은 존재하고 그 역행렬은 부분 역행렬 보조정리(block matrix inversion lemma)[10]에 의해서 다음과 같이 구해진다.

$$\mathbf{P}_w^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{\frac{w}{2}}^{-1} - \frac{1}{4w^2} \mathbf{P}_{\frac{w}{2}}^{-1} \mathbf{H}_{\frac{w}{2}} \mathbf{S}^{-1} \mathbf{H}_{\frac{w}{2}}^{-1} \mathbf{P}_{\frac{w}{2}}^{-1} & \frac{1}{2w} \mathbf{P}_{\frac{w}{2}}^{-1} \mathbf{H}_{\frac{w}{2}} \mathbf{S}^{-1} \\ -\frac{1}{2w} \mathbf{S}^{-1} \mathbf{H}_{\frac{w}{2}}^{-1} \mathbf{P}_{\frac{w}{2}}^{-1} & \mathbf{S}^{-1} \end{bmatrix} \quad (15)$$

여기서

$$\mathbf{S}^{-1} = 4w^2 \mathbf{H}_{\frac{w}{2}}^{-1} \mathbf{P}_w \mathbf{H}_{\frac{w}{2}} \quad (16)$$

이고 \mathbf{S} 는 $\mathbf{P}_{\frac{w}{2}}$ 에 대한 \mathbf{P}_w 의 Schur 여수(complement)이다. (16)을 (15)에 대입하여 정리하면 (14)를 얻는다.

해상도가 증가할수록 Haar 행렬과 Haar 연산 행렬이 크기는 2의 멱수로 증가한다. 그런데 Haar 행렬은 (11)에서와 같이 재귀적 관계를 갖으며 Haar 역행렬 역시 (12)에서와 같이 Haar 전치행렬과 대각행렬의 곱으로 쉽게 구할 수 있다. 또한 Haar 적분 연산 역행렬은 정리 1을 이용하여 Haar 연산 행렬의 부분 행렬들로 쉽게 구할 수 있다.

III. 선형 시스템의 상태 해석

다음과 같은 선형 상태 방정식을 고려해 보자.

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \quad (17)$$

여기서 $\mathbf{x}(t) \in R^p$ 는 상태 벡터, $\mathbf{u}(t) \in R^q$ 는 입력 벡터이고, 계수 행렬은 $\mathbf{A} \in R^{p \times p}$, $\mathbf{B} \in R^{p \times q}$ 이며 초기치는 $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ 이다. 입력 $\mathbf{u}(t)$ 가 구간 $[0,1)$ 에서 제곱적분 가능한 함수라고 가정하면 입력은 다음과 같이 Haar 행렬로 표현할 수 있다.

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{G}\Phi_w(t) \quad (18)$$

여기서 주어진 입력에 대해서 $\mathbf{G} \in R^{q \times w}$ 는 앞 절에서 소개된 방법으로 구할 수 있다.

Haar 함수 벡터를 이용하기 위해서 상태 벡터의 미분을 행렬 $\mathbf{F} \in R^{p \times w}$ 을 도입하여 (19)와 같이 Haar 행렬로 근사화하고

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{F}\Phi_w(t) \quad (19)$$

이 식의 양변을 적분하고 (8)을 이용하면

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= \mathbf{F} \int_0^t \Phi_w(\tau) d\tau + \mathbf{x}_0 \\ &= \mathbf{F}\mathbf{P}_w \Phi_w(t) + \mathbf{x}_0 \end{aligned} \quad (20)$$

와 같이 쓸 수 있다. (18)-(20)을 상태방정식 (17)에 대입하면 다음과 같다.

$$\mathbf{F}\Phi_w(t) = \mathbf{A}(\mathbf{F}\mathbf{P}_w \Phi_w(t) + \mathbf{x}_0) + \mathbf{B}\mathbf{G}\Phi_w(t) \quad (21)$$

(21)에서 $\mathbf{A}\mathbf{x}_0 \in R^{q \times 1}$ 는 열 벡터이고 Haar 행렬의 첫 번째 행은 모두 단위 값이므로 $\mathbf{A}\mathbf{x}_0$ 를 $[\mathbf{A}\mathbf{x}_0 \ 0 \ \dots \ 0] \Phi_w(t)$ 와 같이 Haar 행렬과의 곱으로 표현하면 (21)은

$$\mathbf{F} = \mathbf{A}\mathbf{F}\mathbf{P}_w + [\mathbf{A}\mathbf{x}_0 \ 0 \ \dots \ 0] + \mathbf{B}\mathbf{G} \quad (22)$$

와 같이 Stein 방정식으로 표현된다.

$\mathbf{Q} = [\mathbf{A}\mathbf{x}_0 \ 0 \ \dots \ 0] + \mathbf{B}\mathbf{G}$ 로 치환하면 (22)는 다음과 같이 간략히 표현할 수 있다.

$$\mathbf{F} - \mathbf{A}\mathbf{F}\mathbf{P}_w = \mathbf{Q} \quad (23)$$

따라서 (17)로 표현된 상태 미분 방정식의 근사 해는 (23)인 Stein 방정식의 해를 구하는 문제로 귀결된다. 일반적으로 이 방정식의 해는 다음과 같이 Kronecker 곱으로 구할 수 있다[15].

$$(\mathbf{I}_w \otimes \mathbf{I}_p - \mathbf{P}_w^{-1} \otimes \mathbf{A}) \text{vec}(\mathbf{F}) = \text{vec}(\mathbf{Q}) \quad (24)$$

여기서 $\text{vec}(\bullet)$ 연산자는 다음과 같이 정의된다.

$$\begin{aligned} \text{vec}(\mathbf{X}) &= [x_{11}, x_{21}, \dots, x_{n1}, x_{12}, \dots, x_{n2}, x_{1m}, x_{2m}, \dots, x_{nm}]^T, \\ \mathbf{X} &\in R^{n \times m} \end{aligned} \quad (25)$$

해상도가 증가하면 (23)으로 표현된 Stein 방정식의 차수가 매우 커지므로 계산량이 매우 많아지게 된다. [2]에서는 적분 연산 행렬의 특성을 이용하여 차수를 반씩 줄여나가는 반복적 기법을 사용하여 \mathbf{F} 를 구하는 알고리즘을 제시하였다. 이 방법은 차수를 줄일 때마다 제곱과 역행렬 계산이 필요하다.

본 연구에서는 정리 1과 $\mathbf{H}_{\frac{w}{2}}^{-1} \mathbf{P}_{\frac{w}{2}} \mathbf{H}_{\frac{w}{2}}$ 가 상부 삼각행렬 구조를 갖는 특성을 이용하여 (23)으로 주어진 방정식을 상부 삼각 Stein 방정식으로 변환하여 해를 쉽게 구하는 방법을 제시한다.

정리 1에 따르면 \mathbf{P}_w 는 정칙 행렬이므로 (23)의 양변에 \mathbf{P}_w^{-1} 을 곱하고 $\mathbf{Z} = \mathbf{F}\mathbf{H}_w$ 라 치환하면 (23)은 다음과 같이 표현된다.

$$\mathbf{Z}\mathbf{H}_w^{-1} \mathbf{P}_w^{-1} - \mathbf{A}\mathbf{Z}\mathbf{H}_w^{-1} = \mathbf{Q}\mathbf{P}_w^{-1} \quad (26)$$

양변에 \mathbf{H}_w 을 곱하면 다음과 같다.

$$\mathbf{Z}\mathbf{H}_w^{-1} \mathbf{P}_w^{-1} \mathbf{H}_w - \mathbf{A}\mathbf{Z} = \mathbf{Q}\mathbf{P}_w^{-1} \mathbf{H}_w \quad (27)$$

여기서 $\mathbf{C}_w = \mathbf{H}_w^{-1} \mathbf{P}_w \mathbf{H}_w$ 이라 놓으면 (12)와 정리 1에 의해서 $\mathbf{C}_w^{-1} = \mathbf{H}_w^{-1} \mathbf{P}_w^{-1} \mathbf{H}_w$ 로 구해져서 (27)은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\mathbf{Z} - \mathbf{A}\mathbf{Z}\mathbf{C}_w = \mathbf{Q}\mathbf{H}_w \quad (28)$$

각 w 에 대해서 \mathbf{H}_w 와 \mathbf{P}_w 는 각각 (11)과 (9)와 같이 재귀적으로 표현되는 고정된 값을 갖는 행렬이다. \mathbf{C}_w 는 이들 행렬의 곱 $\mathbf{H}_w^{-1} \mathbf{P}_w \mathbf{H}_w$ 에 의해 다음과 같은 구조를 갖는다. 즉 $w=2$ 일때

$$\mathbf{C}_2 = \mathbf{H}_2^{-1} \mathbf{P}_2 \mathbf{H}_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

이고 $w=4$ 일때

$$\mathbf{C}_4 = \mathbf{H}_4^{-1} \mathbf{P}_4 \mathbf{H}_4 = \begin{bmatrix} \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{8} \end{bmatrix}$$

와 같이 유사한 패턴이 반복되는 구조를 갖는다. 따라서 C_w 는 (29)와 같이 주대각 요소는 모두 $\frac{1}{2^w}$ 이고 주대각 위는 전부 $\frac{1}{w}$ 이며 주대각 아래는 0인 상부 삼각 행렬이다.

$$C_w = \begin{bmatrix} \frac{1}{2^w} & \frac{1}{w} & \dots & \frac{1}{w} \\ 0 & \frac{1}{2^w} & & \frac{1}{w} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \frac{1}{2^w} \end{bmatrix} \quad (29)$$

(28)로 표현된 Stein 방정식에서 Z, QH_w 를 차원이 모두 $p \times \frac{w}{2}$ 인 부분행렬로 분할하여 다음과 같이 정의하고

$$Y_{(0)}^{(1)} \triangleq QH_w = [Y_{(0)}^{(1)} \quad Y_{(0)}^{(2)}] \quad (30)$$

$$Z_{(0)}^{(1)} \triangleq Z = [Z_{(0)}^{(1)} \quad Z_{(0)}^{(2)}] \quad (31)$$

차원이 $w \times w$ 인 C_w 를 (32)와 같이 차원이 모두 $\frac{w}{2} \times \frac{w}{2}$ 인 부분행렬로 분할하면 $C_{\frac{w}{2}}^{(1)}$ 은 (29)와 동일한 구조를 갖는 상부 삼각 행렬이고 $C_{\frac{w}{2}}^{(2)}$ 는 모든 요소가 $\frac{1}{w}$ 인 행렬이다.

$$C_w = \begin{bmatrix} C_{\frac{w}{2}}^{(1)} & C_{\frac{w}{2}}^{(2)} \\ \mathbf{0} & C_{\frac{w}{2}}^{(1)} \end{bmatrix} \quad (32)$$

(28)은 (30)-(32)를 대입하여 정리하면 $p \times w$ 차원을 갖는 Stein 방정식은 각각 $p \times \frac{w}{2}$ 로 저장화된 2개의 Stein 방정식으로 분리된다.

$$Z_{(0)}^{(1)} - AZ_{(0)}^{(1)}C_{\frac{w}{2}}^{(1)} = Y_{(0)}^{(1)} \quad (33)$$

$$Z_{(0)}^{(2)} - AZ_{(0)}^{(2)}C_{\frac{w}{2}}^{(1)} = Y_{(0)}^{(2)} + AZ_{(0)}^{(1)}C_{\frac{w}{2}}^{(2)} \quad (34)$$

먼저 (33)에서 $Z_{(0)}^{(1)}$ 를 구하고 이를 (34)의 우측에 대입한 후 $Z_{(0)}^{(2)}$ 를 구함으로써 (31)과 $F = ZH_w^{-1}$ 에 의해서 (23)으로 표현된 Stein 방정식의 해를 구할 수 있다. 그런데 (31)과 (32)의 $C_{\frac{w}{2}}^{(1)}$ 도 역시 상부 삼각 행렬이므로 (30)-(34) 과정을 반복 하면 각각 $p \times \frac{w}{4}$ 로 저장화된 4개의 Stein 방정식으로 분리할 수 있다. 즉 $k=0,1,2,\dots,J-1$ (여기서 J 는 해상도) 및 $1 \leq a \leq 2^k$ 에 대해 (35)와 같이 $p \times \frac{w}{2^k}$ 크기를 갖는 행렬 $Z_{(k)}^{(a)}, Y_{(k)}^{(a)}, Y_{(k)}^{(a*)}$ 를 아래와 같이 각각 $p \times \frac{w}{2^{k+1}}$ 크기를 갖는 부분 행렬로 분할하고

$$Z_{(k)}^{(a)} \triangleq [Z_{(k+1)}^{(2a-1)} \quad Z_{(k+1)}^{(2a)}] \quad (35)$$

$$Y_{(k)}^{(a)} \triangleq [Y_{(k+1)}^{(2a-1)} \quad Y_{(k+1)}^{(2a)}] \quad (36)$$

$$Y_{(k)}^{(a*)} \triangleq Y_{(k)}^{(a)} + AZ_{(k)}^{(a)}C_{\frac{w}{2^k}}^{(2)} = [Y_{(k+1)}^{(2a-1)} \quad Y_{(k+1)}^{(2a)}] \quad (37)$$

$\frac{w}{2^k} \times \frac{w}{2^k}$ 크기의 상부 삼각 행렬도 차원이 $\frac{w}{2^{k+1}} \times \frac{w}{2^{k+1}}$ 인 부분 행렬로 분할한다.

$$C_{\frac{w}{2^k}}^{(1)} \triangleq \begin{bmatrix} C_{\frac{w}{2^{k+1}}}^{(1)} & C_{\frac{w}{2^{k+1}}}^{(2)} \\ 0 & C_{\frac{w}{2^{k+1}}}^{(1)} \end{bmatrix} \quad (38)$$

그러면 해상도 k 에서 Stein 방정식은 다음과 같이 표현된다.

$$Z_{(k)}^{(a)} - AZ_{(k)}^{(a)}C_{\frac{w}{2^k}}^{(1)} = Y_{(k)}^{(a)} \quad (39)$$

(39)로 표현된 방정식은 (35)-(38)로 정의된 행렬과 (30)-(34) 과정을 이용하면 다음 2개의 저장화된 Stein 방정식으로 분리할 수 있다.

$$Z_{(k+1)}^{(2a-1)} - AZ_{(k+1)}^{(2a-1)}C_{\frac{w}{2^{k+1}}}^{(1)} = Y_{(k+1)}^{(2a-1)} \quad (40)$$

$$\begin{aligned} Z_{(k+1)}^{(2a)} - AZ_{(k+1)}^{(2a)}C_{\frac{w}{2^{k+1}}}^{(1)} \\ = Y_{(k+1)}^{(2a)} + AZ_{(k+1)}^{(2a-1)}C_{\frac{w}{2^{k+1}}}^{(2)} = Y_{(k+1)}^{(2a*)} \end{aligned} \quad (41)$$

이 과정을 반복하여 $k=J-1$ 이면 $1 \leq a \leq 2^{J-1}$ 이고 따라서 (28)로 표현된 Stein 방정식을 다음과 같이 w 개의 행렬 방정식으로 분리할 수 있다.

$$Z_{(J)}^{(2a-1)} - AZ_{(J)}^{(2a-1)}C_1^{(1)} = Y_{(J)}^{(2a-1)} \quad (42)$$

$$Z_{(J)}^{(2a)} - AZ_{(J)}^{(2a)}C_1^{(1)} = Y_{(J)}^{(2a)} + AZ_{(J)}^{(2a-1)}C_1^{(2)} \quad (43)$$

여기서 $C_1^{(1)} = \frac{1}{2^w}$ 이고 $C_1^{(2)} = \frac{1}{w}$ 인 상수이므로 (42), (43)은 다음과 같이 단순 대수 방정식 문제로 귀결된다.

$$(I_q - \frac{1}{2^w}A)Z_{(J)}^{(2a-1)} = Y_{(J)}^{(2a-1)} \quad (44)$$

$$(I_q - \frac{1}{2^w}A)Z_{(J)}^{(2a)} = Y_{(J)}^{(2a)} + \frac{1}{w}AZ_{(J)}^{(2a-1)} \quad (45)$$

따라서 (44), (45)들로 표현되는 w 개의 대수 방정식의 해를 구함으로써 (23)으로 표현된 Stein 방정식의 해를 구할 수 있다.

IV. 수치 예

다음과 같은 선형 시스템을 고려하자.

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -20 & -75 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

여기서 초기치는 $x_0 = [1 \quad 0.5]^T$ 이다. 단위계단 입력을 인가 하였을 때 이 시스템의 해석적 해는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \frac{103}{20}e^{-15t} - \frac{83}{20}e^{-5t} \\ x_2(t) &= -\frac{107}{300}e^{-15t} + \frac{83}{100}e^{-5t} + \frac{1}{75} \end{aligned}$$

해상도가 $J=3, (w=8), J=4, (w=16), J=6, (w=64)$ 일 때 해석적 해와 Haar 웨이블릿 방법을 이용해 구한 해를 각각 그림 1~3에 나타내었다.

그림 1~3에서 실선은 해석적 해를 나타내고 작은 원과 별표는 Haar 웨이블릿 방법을 이용해서 구한 해의 궤적을 나타낸다. 해상도가 증가할수록 Haar 웨이블릿 방법을 이용해서 구한 해가 해석적 해에 수렴함을 알 수 있다.

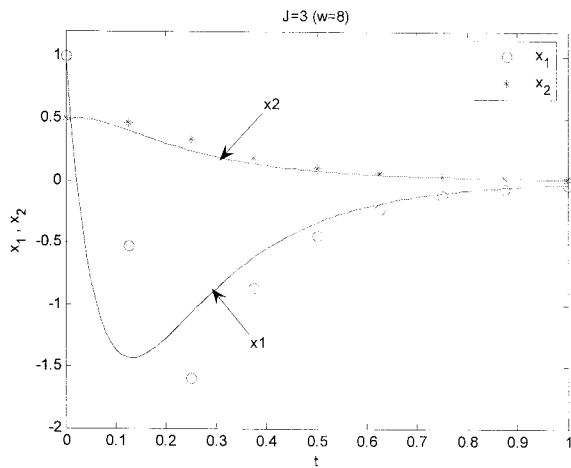


그림 1. 해상도 $J=3$ 일 때 상태 변수 궤적.
Fig. 1. State trajectories at resolution $J=3$.

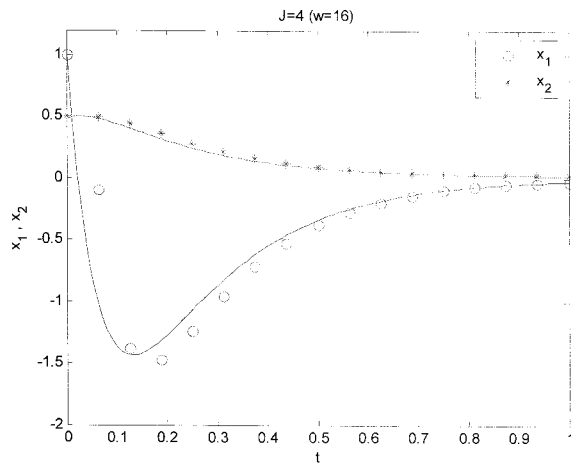


그림 2. 해상도 $J=4$ 일 때 상태 변수 궤적.
Fig. 2. State trajectories at resolution $J=4$.

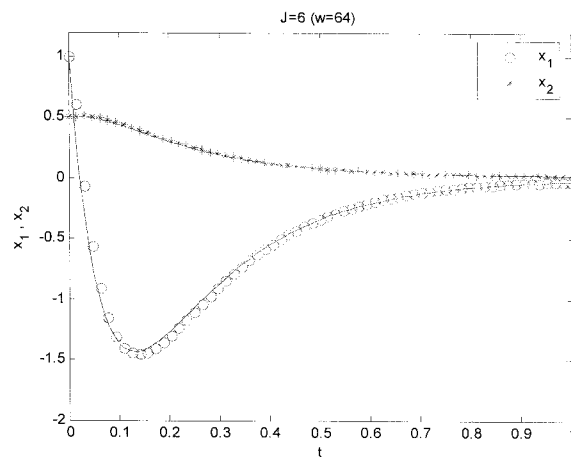


그림 3. 해상도 $J=6$ 일 때 상태 변수 궤적.
Fig. 3. State trajectories at resolution $J=6$.

Runge-Kutta 방법으로 구한 해와 Haar 웨이블릿을 이용해서 구한 해를 비교하기 위해서 다음과 같은 4차 선형 시스템을 고려하자.

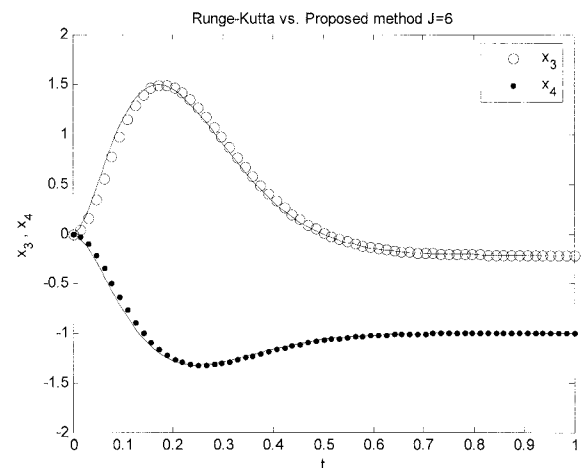


그림 4. Runge-Kutta 방법과 제안된 방법과의 비교.
Fig. 4. Comparison for Runge-Kutta method and the proposed method.

표 1. Flop 수 및 비율.

Table 1. Flop counts and the ratio.

J	Kronecker	Chen-Hsiao	제안된 방법	비율
2	4096	928	408	0.439
3	32768	1808	1056	0.584
4	262144	3776	2848	0.754
5	2097152	9456	8192	0.866
6	16777216	28704	25472	0.887
7	134217728	99664	85504	0.857
8	1073741824	372352	305664	0.820
9	8.5899×10^9	1441712	1142784	0.792
10	6.8719×10^{10}	5677280	4397056	0.774
11	5.4975×10^{11}	22536720	17211392	0.763
12	4.3980×10^{12}	89809728	68034560	0.757
13	3.5184×10^{13}	358573168	270401536	0.754
14	2.8147×10^{14}	1432970656	1077903360	0.752
15	2.2518×10^{15}	5.7292×10^9	4.3037×10^9	0.751

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} -33 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 621.4 & -28.27 & 0 \\ 0 & -327.1 & 12.72 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \mathbf{u}(t)$$

초기치는 모두 0이고 단위계단 입력을 인가하였을 때 결과를 그림 4에 나타냈다. 여기서 실선은 Runge-Kutta 방법에 의해 구해진 해이고 작은 원과 점은 해상도 6일때 Haar 웨이블릿을 이용해서 구한 해이다. 그림에서 볼 수 있듯이 Haar 웨이블릿을 이용해서 구한 해가 Runge-Kutta 방법에 의해 구한 해에 매우 근접하게 구해짐을 알 수 있다.

표 1은 Stein 방정식 (23)을 (24)으로 표현된 Kronecker 곱에 의한 방법, Chen-Hsiao 방법[2]과 본 논문에서 제안된 방법으로 해를 구할 때의 flop 수를 보여준다. 여기서 A 는 4×4 행렬이고, 해상도는 $2(w=4)$ 부터 $15(w=2^{15}=1.540 \times 10^{16})$ 까지이며 비율은 Chen-Hsiao 방법과 제안된 방법과의 flop 비이

다(제한된 방법/Chen-Hsiao). Chen-Hsiao 방법에서의 연산시간은 $O\left(\sum_{k=2}^l \left(p \frac{m}{2^k} \left(4 \frac{m}{2^k} + 6p - 4\right) + 5p^3 - p^2\right)\right)$ 이고, 제한된 방법에서는 $O\left(\sum_{k=2}^l \left(p \frac{m}{2^k} \left(2p + 2 \frac{m}{2^k} - 1\right) 2^{k-1}\right)\right)$ 이다.

해상도가 증가할수록 Haar 행렬은 멱급수적으로 증가하고 이에 따라 flop 수도 매우 크게 증가함을 볼 수 있다. (24)의 Kronecker 곱에 의한 방법에서 연산시간은 $O(w^3 p^3)$ 이므로 계산량이 가장 많고 또한 $w p \times w p$ 크기의 행렬을 필요로 한다. 반면 Chen-Hsiao 방법과 본 논문에서 제안된 방법(23)의 행렬들을 분할하여 해를 구하므로 $A(p \times p)$, $F, Q(p \times w)$, $P_w(w \times w)$ 가 필요하다. 표 1에서 볼 수 있듯이 제안된 방법은 Chen-Hsiao에 비해 약 88~75% 정도의 flop으로 동일한 결과를 얻을 수 있어 12~25% 정도의 계산량을 줄일 수 있다.

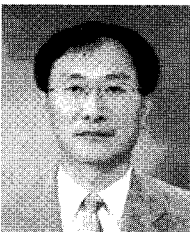
V. 결론

선형 미분 방정식으로 표현된 동적 시스템에서 Haar 함수 행렬 및 적분 연산 행렬을 적용하여 미분 방정식의 문제를 Stein 방정식의 문제로 변환하여 해를 구할 수 있음을 보였다. 해상도가 증가하게 되면 Stein 방정식의 차수가 매우 커지게 되는데 본 연구에서 증명한 적분 연산 역행렬 및 변수 치환을 이용하여 Stein 방정식을 대수 방정식으로만 변환한 후 여기서 구한 해를 합성하여 전체 해를 계산량을 줄이면서 쉽게 구할 수 있음을 보였다.

참고문헌

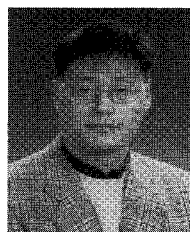
[1] R. S. Stankovic and B. J. Falkowski, "The haar wavelet transform: its status and achievements," *Computers and Electrical Engineering*, vol. 29, no. 1, pp. 25-44, 2003.
 [2] C. F. Chen and C. H. Hsiao, "Haar wavelet method for solving lumped and distributed-parameter systems," *IEE Proc. Control Theory Appl.* vol. 144, pp. 87-94, 1997.
 [3] M. Ohkita and Y. Kobayashi, "An application of rationalized Haar functions to solution of linear differential equations." *IEEE*

Trans. Circuits Systems I. Fund. Theory Appl. vol. 9, pp. 853-862, 1986.
 [4] C. H. Hsiao and W. J. Wang, "State analysis and parameter estimation of bilinear systems via Haar wavelets," *IEEE Trans. Circuits Systems I. Fundam. Theory Appl.* vol. 47, pp. 246-250, 2000.
 [5] B. S. Kim, I. J. Shim, B. K. Choi, and J. H. Jeong, "Wavelet based control for linear systems via reduced order Sylvester equation," *The 3rd Int. Conf. on Cooling and Heating Technologies*, pp. 239-244, 2007.
 [6] B. S. Kim and I. J. Shim, "Haar wavelet-based control for HVAC systems," *2007 Int. Sym. On Advanced Intelligent Systems*, pp. 647-650, 2007.
 [7] M. H. Reihani and Z. Abadi, "Rationalized haar functions method for solving Fredholm and Volterra integral equations," *Journal of Computational and Applied Mathematics*, vol. 200, pp. 12-20, 2007.
 [8] C. H. Hsiao, "Solution of variational problems via Haar orthonormal wavelet direct method," *Int. J. Comput. Math.*, vol. 81, pp. 871-887, 2004.
 [9] A. Haar, "Zur theorie der orthogonalen funktionensysteme," *Math. Ann.* vol. 69, pp. 331-371, 1910.
 [10] C. H. Hsiao, "State analysis of linear time delayed systems via Haar wavelets," *Math. Comput. Simul.* vol. 44, pp. 457-470, 1997.
 [11] C. H. Hsiao and W. J. Wang, "Optimal control of linear time-varying systems via Haar wavelets," *J. Optim. Theory Appl.* vol. 103, pp. 641-655, 1999.
 [12] C. F. Chen and C. H. Hsiao, "Wavelet approach to optimising dynamic systems," *IEE Proc. Pt. D Control Theory Appl.* 146, pp. 213-219, 1999.
 [13] C. H. Hsiao and W. J. Wang, "State analysis and parameter estimation of bilinear systems via Haar wavelets," *IEEE Trans. Circuits Syst. I Fundam. Theory Appl.* vol. 47, pp. 246-250, 2000.
 [14] R. A. Horn and C. R. Johnson, "Matrix analysis," New York, Cambridge Univ. Press, 1985.
 [15] J. Brewer, "Kronecker products and matrix calculus in system theory," *IEEE Trans. on Circuits and Systems*, vol. 25, pp. 772-781, 1978.



김 범 수

1987년 고려대학교 전기공학과. 1989년 고려대학교 대학원 전기공학과(공학석사). 2002년 고려대학교 대학원 전기공학과(공학박사). 1989년~1998년 LG산전 연구소 선임연구원. 현재 경상대학교 기계항공공학부 조교수.



심 일 주

1987년 고려대학교 전기공학과. 1989년 고려대학교 대학원 전기공학과(공학석사). 2005년 고려대학교 대학원 전기공학과(공학박사). 현재 대림대학 자동화 시스템과 전임강사. 관심분야는 웹기반의 원격감시제어, 지능형 빌딩시스템,

유비쿼터스 컴퓨팅 시스템.