

최소자승 관점에서의 선형 상태추정 기법

새로운 상태추정 이론의 개발을 위해서는 확률론적 방법과 상호보완관계에 놓여있는 최소자승 추정기법에 기반한 연구방법론이 함께 고려되는 것이 바람직하다. 본 고에서는 많은 연구자들의 관심을 환기시키고자 통계적/비통계적 최소자승 추정관점에서 칼만필터이론 재조명 하고, 최소자승 추정 개념의 확장 가능성을 보이기 위해 최근 개발된 강인 상태추정 기법을 간략히 소개한다.

■ 나원상, 황익호
(국방과학연구소 유도조종부)

1. 서론

선형 확률 동적 시스템의 상태추정과 관련된 연구 주제들은 매우 긴 역사적 유래를 갖고 있다. 1795년 Gauss에 의해 최소자승(least-squares) 추정기법 [1]이 개발된 이후로 1912년 Fisher가 최대 우도(maximum likelihood) 추정기법 [2]을, 1941년 및 1942년에는 Kolmogorov와 Wiener가 거의 동시에 선형 최소평균자승(linear minimum mean squares) 추정기법 [3,4]을 고안한 바 있다. 하지만, 선형 확률 동적 시스템 모델에 기반한 본격적인 현대 상태추정 이론 연구는 대부분 1960년에 발표된 Kalman의 연구 결과 [5]에 기초하고 있다고 해도 과언이 아니다. 칼만필터는 상태변수 및 상태전이 개념을 이용한 모델기반 추정기법으로, 순환식을 사용한 상태추정치의 산출과정에서 1/2차 모멘트만을 사용함으로써 구현이 매우 용이하며, 부정확한 공정 및 측정잡음 분산에도 상당히 강인한 특성 [6]을 지니고 있다. 뿐만 아니라, 비정적(non-stationary) 시스템의 상태추정문제에도 적용 가능하다는 장점을 갖고 있다. 이러한 특성들로 인해 칼만필터는 제어 및 신호처리 분야의 다양한 실제 문제들에 성공적으로 적

용되어 왔으며, 현재까지도 상태추정 기법의 대명사로 자리매김하고 있다.

Kalman은 통계적 최소자승(stochastic least squares) 개념을 적용하여 상태추정 문제의 해를 도출하고자 하였다. 이를 위해, 단일모드 대칭 이차 손실함수(unimodal symmetric loss function)를 최소화하는 최적 선형 상태추정치가 조건부 평균(conditional mean)으로 표현되며, 조건부 평균은 측정치 벡터로 구성된 확률 벡터공간(module space)에서의 정사영(projection)을 이용하여 산출됨을 증명하였다. 이러한 기하학적 상관관계에 기초하여 후일 칼만필터로 명명된 순환 최소자승 필터 식이 유도되었다. 또한, 칼만필터 문제와 최적 제어문제 사이의 쌍대성(duality)을 밝혀냄으로써, 다양한 제어기법을 이용한 필터링 기법의 개발을 촉발시키는 계기를 마련하였다.

칼만필터 이론은 수학적 완성도 및 그 유용성으로 인해 1960-70년대에 들어 많은 학자들의 관심의 초점이 되었다. 특히, 전통적인 확률론적 관점에서의 추정 기법으로 분류되는 베이시안(Bayesian) [7], 최대 사후확률(maximum a posteriori) 및 최대 우도 [8,9], 그리고 최소 분산(minimum variance) [10] 기법들을 활용한

칼만필터 이론의 재해석 작업이 활발히 이루어졌다. 이후, 국내외를 막론하고, 확률론적 관점에서의 상태추정 기법은 다양한 적응 필터(adaptive filter) 및 가설 검증 필터(multiple hypothesis filter) 등으로 발전되었다.

반면, 최근의 국내 연구동향을 살펴볼 때, 상태추정 이론의 시발점이자 칼만필터 이론의 근간이 되었던 최소자승 관점에서 상태추정문제를 해결하고자 하는 노력은 상대적으로 부족한 실정이다. 하지만, 최소자승 관점에서의 상태추정 기법이 가지고 있는 중요한 특성들, 특히 확률론적 관점에 비해 문제설정 과정에서 요구되는 가정들이 상대적으로 적다는 점, 산출된 해에 관한 기하학적 해석이 가능하다는 점, 그리고 관련 제어이론 및 통계적 최적화(stochastic optimization) 기법을 적용할 수 있는 여지가 있다는 점 등은 쉽게 지나칠 수 없는 중요한 장점들이라 할 수 있다.

실제로 최소자승 관점에서의 상태추정 이론은 칼만필터 이론의 오랜 난제 중의 하나였던 강인성(robustness) 문제에 대한 실마리를 제공하고 있다. 90년대 이후 집중적인 조명을 받기 시작한 강인 칼만필터(robust Kalman filter) 이론 [11,12]과 제약 칼만필터(constrained Kalman filter) 이론 [13]이 그 대표적 사례이다. 강인 칼만필터 이론은 시스템 모델의 파라미터 불확실성(parametric uncertainty)이 야기하는 공칭 칼만필터(nominal Kalman filter)의 성능저하 혹은 안정성 문제를 극복하는 데 관심을 두고 있다. 일반적으로 강인 칼만필터 문제는 파라미터 불확실성에 의해 유발될 수 있는 추정오차 분산의 상한을 최소화하는 대표적인 min-max 문제로 알려져 있다. 반면, 제약 칼만필터 이론은 상태변수에 관한 부가 조건을 만족하는 상태추정치들을 도출함으로써 간접적으로 강인성을 확보하고자 한다. 필터 설계를 위해 칼만필터의 가중 이차 목적함수에 상태변수에 관한 부가조건을 결합시켜 새로이 목적함수를 설정하게 되므로, 제약 최적화 문제의 특수한 형태로 간주될 수 있다. 따라서, 강인 칼만필터 및 제약 칼만필터 문제는 기존의 확률론적 관점으로는 해결이 불가능하며, 관련 제어이론 혹은 통계적 최적화 기법 등의 비확률적 방법이 현재로서는 유일한 해법으로 알려져 있다.

이러한 측면에서 볼 때, 새로운 상태추정 이론을 개발하기 위해서는 확률론적 방법과 상호보완관계에 놓여있는 최소자승 추정기법에 기반한 연구 방법론이 함께 고려되는 것이 바람직하다. 본 고에서는 많은 연구자들의 관심을 환기시키고자 통계적/비통계적 최소자승 추정관점에서 칼만필터 이론을 재해석하고, 에너지 최적 제어기와의 쌍대성을 고찰해 본다. 이와 더

불어, 최소자승 상태추정 이론의 발전 사례로, 측정행렬에 통계적 파라미터 불확실성이 포함된 경우에 대한 강인 최소자승 추정기법 [14,15]의 설계 개념을 간략히 소개한다.

2. 최소자승 추정기법

2.1 비통계적 최소자승 추정기법(Gaussian estimation)

비통계적 최소자승 추정 개념을 이해하기 위해 다음과 같은 벡터 추정방정식을 고려하자.

$$y = Hx + v \tag{1}$$

여기서 $x \in \mathfrak{R}^n$ 은 추정하고자 하는 벡터, $y \in \mathfrak{R}^m$ 는 측정치 벡터, $v \in \mathfrak{R}^m$ 은 분산이 R 인 영평균 백색 측정잡음을 의미한다.

비통계적 최소자승 추정문제는 기본적으로 불능(不能, inconsistent)인 선형 방정식 (1)의 근사해를 찾는 문제이다. 최소자승 추정치 \hat{x} 은 추정오차의 에너지 혹은 스칼라 가중 이차 목적함수 (2)의 최소화 해로 정의된다.

$$\min_x J_{LS} \equiv (y - Hx)^T R^{-1} (y - Hx) = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} R_x & R_{xy} \\ R_{yx} & R_y \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \tag{2}$$

삼각분해(triangular factorization)에 의해 계수행렬 간에 다음 관계가 만족됨을 알 수 있다.

$$\begin{aligned} R_{yy} R_y^{-1} &= (H^T R^{-1} H)^{-1} H^T R^{-1}, \\ R_x - R_{yx} R_y^{-1} R_{xy} &= (H^T R^{-1} H)^{-1} \end{aligned} \tag{3}$$

이차함수 (2)의 정점은 다음과 같이 계산된다.

$$\left. \frac{\partial J_{LS}}{\partial x} \right|_{x=\hat{x}} = 0 \rightarrow \hat{x} = (H^T R^{-1} H)^{-1} H^T R^{-1} y = R_{xy} R_y^{-1} y \tag{4}$$

다음 조건이 만족되면 위의 정점은 주어진 목적함수의 유일한 최소해가 된다.

$$\left. \frac{\partial^2 J_{LS}}{\partial x^2} \right|_{x=\hat{x}} = (H^T R^{-1} H)^{-1} = R_x - R_{yx} R_y^{-1} R_{xy} > 0 \tag{5}$$

이제, 최소자승 추정기법의 기하학적 의미에 관해 생각해 보자. 최소자승 추정치 (4)로부터 다음과 같은 직교방정식(normal equation)을 얻을 수 있다.

$$H^T R^{-1} (y - H\hat{x}) = H^T R^{-1} (y - \hat{y}) = 0 \tag{6}$$

만일 $R = I$ 라면, (6)으로부터 최소자승 추정기법에 의해 정의된 잔차(residual) $e \equiv y - \hat{y}$ 는 행렬 $H = [h_0 \cdots h_n]$ 의 좌영공간(left-null space) 상에 놓이게 됨을 알 수 있다. 이를 스칼라 내적 연산자를 이용하여 수학적으로 표현하면,

$$\langle e, h_i \rangle \equiv e^T h_i = 0, \quad \forall i. \quad (7)$$

결론적으로 최소자승 추정기법의 해는 그림 1(a)와 같이 측정 벡터 y 를 행렬 H 의 열공간(column space) $\mathcal{R}(H)$ 상에 정사영한 것임을 알 수 있다. 지면 관계상 정사영의 유일성(uniqueness) 및 직교성(orthogonality)에 관한 증명 [16]은 생략한다.

2.2 통계적 최소자승 추정기법

통계적 최소자승 추정기법은 선형 최소평균자승 추정기법으로도 일컬어진다. 만일, $\mathbf{x} \in \mathcal{R}^n$ 와 $\mathbf{y}_i \in \mathcal{R}^m$ 가 영평균 랜덤변수이고, $\mathbf{y} = \text{col}\{\mathbf{y}_0, \dots, \mathbf{y}_N\}$ 으로 정의된다면, 선형 최소 평균자승 추정기법은 다음과 같이 오차공분산을 최소화 하는 선형 상태추정치 $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{k}_o^T \mathbf{y}$, $\mathbf{k}_o^T \in \mathcal{R}^{n \times m(N+1)}$ 를 산출하는 문제로 정의된다. 즉,

$$\min_x P(k) \equiv \langle \mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}, \mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}} \rangle = \begin{bmatrix} I \\ -k \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} R_x & R_{xy} \\ R_{yx} & R_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ -k \end{bmatrix} \quad (8)$$

여기서 $\langle p, q \rangle \equiv E\{(p - E\{p\})(q - E\{q\})^T\}$ 를 의미하며, 사용된 계수행렬은 다음과 같다.

$$R_x \equiv \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle, \quad R_y \equiv \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle, \quad R_{xy} = R_{yx}^T \equiv \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \quad (9)$$

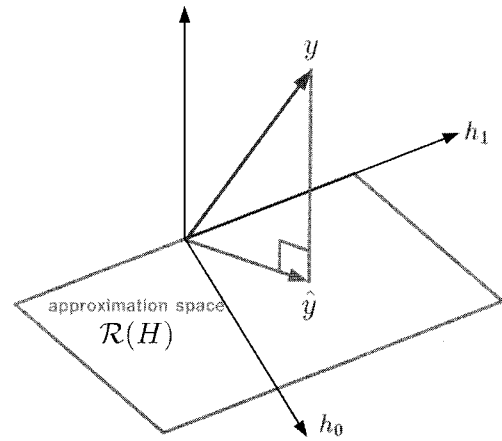
오차공분산의 최소화문제 (8)은 임의의 벡터 $\xi \in \mathcal{R}^n$ 을 이용하여 정의되는 스칼라 이차 함수 $\xi^T P(k) \xi$ 의 최소화문제와 동일한 문제이다. $\xi^T P(k) \xi$ 의 정점은 다음과 같이 주어진다.

$$\left. \frac{\partial \xi^T P(k) \xi}{\partial (k\xi)} \right|_{k=k_o} = 0 \rightarrow \hat{\mathbf{x}} = \mathbf{k}_o^T \mathbf{y} = \mathbf{R}_{xy} \mathbf{R}_y^{-1} \mathbf{y} \quad (10)$$

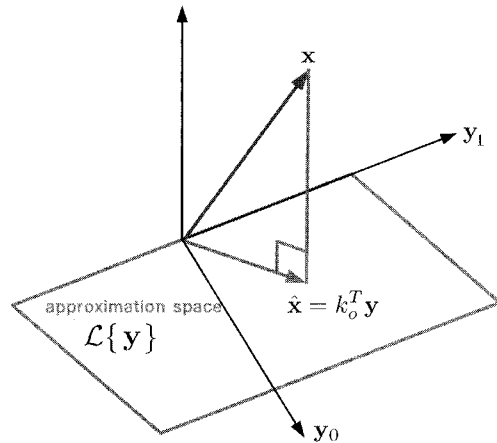
만일 다음 최소조건이 만족되면, 산출된 해는 유일한 최적 선형 상태추정치가 된다.

$$\left. \frac{\partial^2 \xi^T P(k) \xi}{\partial (k\xi)^2} \right|_{k=k_o} > 0 \leftrightarrow R_y > 0 \quad (11)$$

일반화된 벡터공간에서 정의된 통계적 최소자승 추정치 (10)과 비통계적 최소자승 추정치 (4)의 형태는 동일한 반면, 이들의 최소조건 (11) 및 (5)의 형태는 서로 다르다는 사실에 주의할 필요가 있다. 하지만, 내적이 양의 값을 갖도록 정의되는 Hilbert



(a) Orthogonal Projection for Deterministic LS Problem



(b) Orthogonal Projection for Stochastic LS Problem

그림 1. 최소자승 추정치의 기하학적 의미

공간에서의 상태 추정문제를 고려하는 경우 이들 최소조건은 상등이라 할 수 있다. Hilbert 공간에서는 목적함수 (2)의 가중행렬이 양한정(positive definite)이므로, Schur complement를 적용하면, 조건 (11)과 조건 (5)는 상등임을 알 수 있다.

비통계 최소자승 추정문제와 마찬가지로 통계적 최소자승 추정문제에 대한 기하학적 해석도 가능하다. (10)으로부터 통계적 최소자승문제에 대한 직교 방정식(stochastic normal equation)을 생각할 수 있다.

$$\mathbf{k}_o^T \mathbf{R}_y = \mathbf{R}_{xy} \rightarrow \langle \mathbf{x} - \mathbf{k}_o^T \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle = 0 \quad (12)$$

만일 랜덤변수에 대한 행렬내적(matrix valued inner product)을 $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \equiv E\{\mathbf{x}\mathbf{y}^T\}$ 로 정의하면, (12)로부터 상태추정치 $\hat{\mathbf{x}}$ 은 $\{\mathbf{y}_i\}_{i=0}^N$ 에 의해 생성(span)된 선형 모달공간 위로의 정사영이 된다(그림 1(b)). 즉,

$$\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}} \perp \mathcal{L}\{\mathbf{y}_0, \dots, \mathbf{y}_N\} \quad (13)$$

추후 언급되겠지만, 칼만필터식은 상태변수 \mathbf{x} 의 선형 모델 공간 $\mathcal{L}\{\mathbf{y}_0, \dots, \mathbf{y}_N\}$ 위로의 정사영을 반복적으로 계산하는 과정이며, 정사영 직교성을 적극적으로 활용한 이노베이션 기법을 이용하여 손쉽게 유도될 수 있다.

3. 최소자승 기법에서 유도된 칼만필터

본 절에서는 2절에 언급된 비통계적/통계적 최소자승 추정개념 및 그 기하학적 특성을 이용하여 칼만필터를 유도하는 개략적인 과정을 소개한다.

다음과 같은 이산시간 선형 확률동적 시스템을 고려하자.

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{F}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{G}_k \mathbf{u}_k \\ \mathbf{y}_k = \mathbf{H}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k \end{cases} \quad (14)$$

여기서 \mathbf{x}_k 는 시스템의 상태변수, \mathbf{y}_k 는 측정벡터를 의미한다. 공정잡음 \mathbf{u}_k 및 측정잡음 \mathbf{v}_k 는 영평균 백색잡음이고, 초기 추정오차 $\tilde{\mathbf{x}}_{0|0} = \mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_{0|0}$ 과 다음과 같은 관계를 갖는 것으로 가정한다.

$$\left\langle \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{x}}_{0|0} \\ \mathbf{u}_k \\ \mathbf{v}_k \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{x}}_{0|0} \\ \mathbf{u}_j \\ \mathbf{v}_j \end{bmatrix} \right\rangle = \begin{bmatrix} P_{0|0} & 0 & 0 \\ 0 & Q_k & 0 \\ 0 & 0 & R_k \end{bmatrix} \delta_{kj} \quad (15)$$

3.1 순차 최소자승 추정기법

칼만필터 이론을 소개하고 있는 대부분의 관련 서적에서 다루고 있지는 않으나, 통계적 최소자승 추정기법과 비통계적 최소자승 추정기법 사이에는 일대일 대응관계가 존재하므로 칼만필터를 비통계적 최소자승 추정 개념을 이용하여 유도할 수도 있다. 비통계적 최적화 관점에서 볼 때, 칼만필터링 문제는 초기 추정치 $\hat{\mathbf{x}}_{k|k}$ 및 초기 오차 공분산 $P_{k|k}$ 이 주어진 경우 목적함수 (16)에 대한 다단계(multi-stage) 최적화 문제로 정의할 수 있다 [17].

$$\begin{aligned} J_{KF} &= \|\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_{k|k}\|_{P_k^{-1}}^2 + \|\mathbf{u}_k\|_{Q_k^{-1}}^2 + \|\mathbf{y}_{k+1} - \mathbf{H}_{k+1} \mathbf{x}_{k+1}\|_{R_{k+1}^{-1}}^2, \quad \forall k \\ &= \left\| \begin{bmatrix} \mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_{k|k} \\ \mathbf{u}_k \end{bmatrix} \right\|_{P_k^{-1} \oplus Q_k^{-1}}^2 + \|\mathbf{y}_{k+1} - \mathbf{H}_{k+1} \mathbf{x}_{k+1}\|_{R_{k+1}^{-1}}^2 \end{aligned} \quad (16)$$

여기서 $\|p\|_W^2 = p^T W p$, \oplus 는 행렬 직합(matrix direct sum)을 의미한다.

목적함수 (16)을 비통계적 최소자승 추정문제의 목적함수 (2)와 비교하면, 다음과 같은 대응관계를 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} x &\mapsto \begin{bmatrix} x_k \\ u_k \end{bmatrix}, \quad y \mapsto \begin{bmatrix} \hat{x}_{k|k} \\ 0 \\ y_{k+1} \end{bmatrix}, \quad v \mapsto \begin{bmatrix} \hat{x}_{k|k} - x_k \\ -u_k \\ v_{k+1} \end{bmatrix}, \\ H &\mapsto \begin{bmatrix} I \\ H_{k+1} [F_k \ G_k] \end{bmatrix}, \quad R \mapsto \begin{bmatrix} P_{k|k} & 0 & 0 \\ 0 & Q_k & 0 \\ 0 & 0 & R_{k+1} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (17)$$

위의 상관관계를 (4)에 대입하면,

$$\mathcal{P}^{-1} \begin{bmatrix} \hat{x}_{k|k+1} \\ \hat{u}_{k|k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{k|k}^{-1} & 0 \\ 0 & Q_k^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_{k|k} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F_k^T \\ G_k^T \end{bmatrix} H_{k+1}^T R_{k+1}^{-1} y_{k+1} \quad (18)$$

여기서

$$\mathcal{P}^{-1} \equiv \begin{bmatrix} P_{k|k} & 0 \\ 0 & Q_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F_k^T \\ G_k^T \end{bmatrix} H_{k+1}^T R_{k+1}^{-1} H_{k+1} [F_k \ G_k]$$

$k+1$ 시점에서의 사후 추정치를 다음과 같이 정의하면,

$$\hat{x}_{k+1|k+1} \equiv F_k \hat{x}_{k|k+1} + G_k \hat{u}_{k|k+1} \quad (19)$$

(18)로부터 다음 결과식을 얻는다.

$$\begin{aligned} \hat{x}_{k+1|k+1} &= (I + P_{k+1|k} H_{k+1}^T R_{k+1}^{-1} H_{k+1})^{-1} \\ &\quad \times (\hat{x}_{k+1|k} + P_{k+1|k} H_{k+1}^T R_{k+1}^{-1} y_{k+1}), \end{aligned} \quad (20)$$

$$\hat{x}_{k+1|k} = F_k \hat{x}_{k|k}, \quad (21)$$

$$P_{k+1} = F_k P_{k|k} F_k^T + G_k Q_k G_k^T$$

(21)은 칼만필터의 시간 갱신식과 동일함을 알 수 있다. 사후 추정오차 공분산을 다음과 같이 정의하면,

$$P_{k+1|k+1}^{-1} \equiv P_{k+1|k}^{-1} + H_{k+1}^T R_{k+1}^{-1} H_{k+1} \quad (22)$$

(20)으로부터 칼만필터의 측정치 갱신식을 얻을 수 있다.

$$\hat{x}_{k+1|k+1} = \hat{x}_{k+1|k} + P_{k+1|k+1} H_{k+1}^T R_{k+1}^{-1} (y_{k+1} - H_{k+1} \hat{x}_{k+1|k}) \quad (23)$$

3.2 이노베이션 기법 (Innovation approach)

이노베이션 기법은 정사영의 직교성을 이용하여, 시스템 (14)에 대한 통계적 최소자승 추정치를 순환식 형태로 산출하는 방법이다 [18]. 이노베이션 기법의 기본 아이디어는 Gram-Schmidt

직교화와 밀접한 관련이 있다. 임의의 벡터 시퀀스 η_k 에 modified Gram-Schmidt 직교화 과정을 적용하면, 직교벡터 ε_k 를 순차적으로 산출해 낼 수 있다.

$$\begin{aligned} \varepsilon_0 &= \eta_0 \\ \varepsilon_1 &= \eta_1 - \eta_1^T \varepsilon_0 (\varepsilon_0^T \varepsilon_0)^{-1} \varepsilon_0 \\ \varepsilon_2 &= \eta_2 - \eta_2^T \varepsilon_0 (\varepsilon_0^T \varepsilon_0)^{-1} \varepsilon_0 - \eta_2^T \varepsilon_1 (\varepsilon_1^T \varepsilon_1)^{-1} \varepsilon_1 \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} &\vdots \\ \begin{bmatrix} \eta_0 \\ \eta_1 \\ \vdots \\ \eta_k \end{bmatrix}_{\eta^k} &= \begin{bmatrix} I & & & \\ \eta_1^T \varepsilon_0 (\varepsilon_0^T \varepsilon_0)^{-1} & I & & \\ \vdots & & \ddots & \\ \eta_k^T \varepsilon_0 (\varepsilon_0^T \varepsilon_0)^{-1} & \eta_k^T \varepsilon_1 (\varepsilon_1^T \varepsilon_1)^{-1} & \cdots & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_0 \\ \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_k \end{bmatrix}_{\varepsilon^k} \end{aligned} \quad (25)$$

(24)에서 확인할 수 있듯이 modified Gram-Schmidt 직교화 과정은 벡터 시퀀스 η_k 의 선형 벡터공간 $\mathcal{L}\{\eta_0, \dots, \eta_{k-1}\}$ 위로의 정사영을 반복적으로 산출하는 과정으로 이해될 수 있다. 이는 칼만필터의 개념과 매우 유사한 것이다.

이제, 사전추정치 $\hat{x}_{k|k-1}$ 을 이용하여 시스템 (14)의 이노베이션 시퀀스를 다음과 같이 정의해보자.

$$e_k \equiv y_k - \hat{y}_{k|k-1} = y_k - H_k \hat{x}_{k|k-1} \quad (26)$$

이노베이션 정리에 의하면, 이노베이션 시퀀스는 다음과 같은 성질을 갖고 있다[19].

$$\langle e_k, e_l \rangle = \begin{cases} 0 & , k \neq l \\ H_k P_{k|k-1} H_k^T + R_k & , k = l \end{cases} \quad (27)$$

즉, 통계적 관점에서 볼 때 이노베이션 시퀀스는 백색 특성 (whiteness)을 갖고 있다고 할 수 있다. 기하학적 관점에서 볼 때, 이노베이션 시퀀스 (26)은 modified Gram-Schmidt 직교화 과정에 의해 산출된 직교벡터 ε_k 와 유사한 기하학적 속성을 가지고 있다고 할 수 있다. 물리적으로는, 사전추정치 $\hat{x}_{k|k-1}$ 이 측정치 시퀀스 $\{y_i\}_{i=0}^{k-1}$ 의 함수로 정의되므로 이노베이션 시퀀스는 측정치 y_k 에 포함되어 있는 새로운 정보를 의미하는 것이다.

Modified Gram-Schmidt 과정 (26)에 직교벡터 ε_k 대신 이노베이션 시퀀스 e_k 를, 벡터 시퀀스 η_k 대신 상태변수 x_k 를 대입하면, 표준 칼만필터 식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \hat{x}_{k+1|k} &= \sum_{j=0}^k \langle x_{k+1}, e_j \rangle R_{e,j}^{-1} e_j \\ &= \sum_{j=0}^{k-1} \langle x_{k+1}, e_j \rangle R_{e,j}^{-1} e_j + K_{p,k} e_k \\ &= F_k \sum_{j=0}^{k-1} \langle x_k, e_j \rangle R_{e,j}^{-1} e_j + G \underbrace{\sum_{j=0}^{k-1} \langle u_k, e_j \rangle R_{e,j}^{-1} e_j}_0 + K_{p,k} e_k \\ &= F_k \hat{x}_{k|k-1} + K_{p,k} e_k \end{aligned} \quad (28)$$

위의 식에서 이노베이션 시퀀스의 공분산과 칼만필터 이득은 (29)와 같이 정의된다. (29)의 유도과정에서 (28)과 마찬가지로 이노베이션 시퀀스의 백색특성이 적절히 사용된다.

$$\begin{aligned} R_{e,k} &\equiv \langle e_k, e_k \rangle = H_k P_{k|k-1} H_k^T + R_k, \\ K_{p,k} &\equiv \langle x_{k+1}, e_k \rangle R_{e,k}^{-1} = F_k P_{k|k-1} H_k^T R_{e,k}^{-1} \end{aligned} \quad (29)$$

추정오차 공분산에 관한 순환식을 얻기 위해 다음 관계식을 고려하자.

$$x_k = \tilde{x}_{k|k-1} + \hat{x}_{k|k-1} \quad (30)$$

그림 1(b)에서 $\tilde{x}_{k|k-1} \perp \hat{x}_{k|k-1}$ 이므로,

$$\underbrace{\langle x_k, x_k \rangle}_{\Pi_k} = \underbrace{\langle \tilde{x}_{k|k-1}, \tilde{x}_{k|k-1} \rangle}_{P_{k|k-1}} + \underbrace{\langle \hat{x}_{k|k-1}, \hat{x}_{k|k-1} \rangle}_{\Sigma_{k|k-1}} \quad (31)$$

u_k 가 영평균 백색잡음이므로 (31)의 정의로부터 (32)를 얻을 수 있다.

$$\Pi_{k+1} = F_k \Pi_k F_k^T + G_k Q_k G_k^T \quad (32)$$

이노베이션 시퀀스의 정의에 따라 $e_k \perp \mathcal{L}\{y_0, \dots, y_{k-1}\}$ 이 만족되므로,

$$\Sigma_{k+1|k} = F_k \Sigma_{k|k-1} F_k^T + K_{p,k} R_{e,k} K_{p,k}^T \quad (33)$$

따라서, (32) 및 (33)으로부터 사전 추정오차 공분산의 갱신식을 얻을 수 있다.

$$P_{k+1|k} = F_k P_{k|k-1} F_k^T + G_k Q_k G_k^T - K_{p,k} R_{e,k} K_{p,k}^T \quad (34)$$

3.3 에너지 최적 제어기와의 쌍대성

통계적 최소자승 추정 관점에서 볼 때, 칼만필터의 목적함수는 임의의 벡터 ξ_k 를 이용하여 다음과 같이 정의된다.

$$J_{KF} = \xi_k^T P_{k+k-1} \xi_k = E[(\xi_k^T \tilde{x}_{k|k-1})^2] \quad (35)$$

목적함수 (35)로부터 칼만필터와 에너지 최적 제어기 간의 구조적 대응관계를 생각해 볼 수 있다 [20].

쌍대성 확인을 위해 편의상 $F_k = F$, $G_k = G$, $H_k = H$ 및 $Q_k = Q$, $R_k = R$ 인 시불변 선형 확률 동적 시스템을 고려하도록 한다. (14)와 칼만필터 (28)을 이용하면 다음과 같은 오차 시스템을 구성할 수 있다.

$$\tilde{x}_{k+1|k} = F\tilde{x}_{k|k-1} - K_{p,k}H\tilde{x}_{k|k-1} + Gu_k - K_{p,k}v_k \quad (36)$$

(36)의 양변에 ξ_k^T 를 곱하면 다음 식을 얻을 수 있다.

$$\xi_k^T \tilde{x}_{k+1|k} = \xi_{k-1}^T \tilde{x}_{k-1|k-2} + v_k^T u_{k-1} + \varpi_k^T v_{k-1} \quad (37)$$

여기서

$$\xi_{k-1} \equiv F^T \xi_k - H^T K_{p,k-1}^T \xi_k, \quad v_k \equiv G^T \xi_k, \quad \varpi_k \equiv -K_{p,k-1}^T \xi_k$$

(37)의 정의로부터 다음과 같은 쌍대 시스템(dual system)을 생각할 수 있다.

$$\begin{cases} \xi_{k-1} = F^T \xi_k + H^T \varpi_k \\ v_k = G^T \xi_k \end{cases} \quad (38)$$

쌍대 시스템 (38)에 대해 목적함수 (35)를 최소화하는 최적 상태제환 제어기 $\varpi_k = -K_{p,k}^T \xi_k$ 를 설계 하는 문제를 생각해 보자. 복잡한 계산과정을 거쳐 목적함수 (35)를 제어입력 ϖ_k 의 완전 제곱 꼴로 재구성하면,

$$J_{KF} = \xi_k^T P_{k|k-1} \xi_k + (\delta^k)^T (\mathcal{R}_k + \mathcal{H}_k \mathcal{Q}_k \mathcal{H}_k^T)^{-1} \delta^k \quad (39)$$

여기서

$$\begin{aligned} \delta^k &= \varpi^k + (\mathcal{R}_k + \mathcal{H}_k \mathcal{Q}_k \mathcal{H}_k^T)^{-1} \mathcal{H}_k \mathcal{Q}_k \mathcal{G}_k^T \xi_k \\ P_{k|k-1} &= \mathcal{G}_k \mathcal{Q}_k \mathcal{G}_k^T - \mathcal{G}_k \mathcal{Q}_k \mathcal{H}_k^T (\mathcal{R}_k + \mathcal{H}_k \mathcal{Q}_k \mathcal{H}_k^T)^{-1} \mathcal{H}_k \mathcal{Q}_k \mathcal{G}_k^T \\ \varpi^k &= \begin{bmatrix} \varpi_k \\ \varpi^{k-1} \end{bmatrix}, \quad \varpi^0 = \varpi_0, \quad \mathcal{R}_k = \begin{bmatrix} R & 0 \\ 0 & \mathcal{R}_{k-1} \end{bmatrix}, \quad \mathcal{R}_0 = R \\ \mathcal{Q}_k &= \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & \mathcal{Q}_{k-1} \end{bmatrix}, \quad \mathcal{Q}_0 = P_0, \quad \mathcal{G}_k^T = \begin{bmatrix} G^T \\ \mathcal{G}_{k-1}^T F^T \end{bmatrix}, \quad \mathcal{G}_0^T = F^T \\ \mathcal{H}_k^T &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ g_{k-1}^T & H_{k-1}^T \end{bmatrix}, \quad H_0^T = H^T \end{aligned}$$

따라서 목적함수 (39)를 최소화하는 쌍대 시스템의 제어입력은 다음과 같이 주어진다.

$$\varpi^k = -(\mathcal{R}_k + \mathcal{H}_k \mathcal{Q}_k \mathcal{H}_k^T)^{-1} \mathcal{H}_k \mathcal{Q}_k \mathcal{G}_k^T \xi_k \quad (40)$$

블록행렬의 정의 (39)에 따라 행렬 $P_{k|k-1}$ 의 순환식을 구하면, 칼만필터의 오차 공분산 행렬 갱신식 (34)와 동일한 결과를 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} P_{k|k-1} &= GQG^T + FP_{k-1|k-2}F^T \\ &\quad - FP_{k-1|k-2}H^T(R + HP_{k-1|k-2}H^T)^{-1}HP_{k-1|k-2}F^T \end{aligned} \quad (41)$$

이제, 남은 문제는 쌍대시스템의 최적 제어입력 (40)으로부터 칼만필터 이득을 유도하는 것이다. 앞서와 마찬가지로 (39)의 블록행렬의 정의를 이용해, (40)을 다시 쓰면,

$$\begin{aligned} \varpi^k &= \begin{bmatrix} -(R + HP_{k-1|k-2}H^T)^{-1}HP_{k-1|k-2}F^T \xi_k \\ \varpi^{k-1} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -K_{p,k-1}^T \xi_k \\ \varpi^{k-1} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (42)$$

따라서, 쌍대시스템의 상태제환 이득은 다음과 같이 정의되며, 이는 칼만필터 이득 (29)와 동일한 것이다.

$$K_{p,k} = FP_{k|k-1}H^T(HP_{k|k-1}H^T + R)^{-1} \quad (43)$$

이상의 결과로부터, 목적함수 (35) 혹은 (39)를 최소화하는 시스템 (38)의 최적 상태제환 제어기 설계문제는 칼만필터링 문제의 쌍대 문제라는 결론을 내릴 수 있다.

4. 최소자승 추정 이론의 확장

최소자승 추정 이론의 확장 사례로 강인 최소자승 추정 기법을 소개한다. 관련 내용 및 상태추정 문제로의 확장은 참고문헌 [14,15]에 구체적으로 설명되어 있으므로 여기서는 그 개념만을 간략히 설명하도록 한다.

벡터 측정 방정식 (1)에서 측정행렬의 잡값 H 가 가용하지 않은 경우를 고려한다. 최소자승 추정기 설계를 위해 가용한 정보는 통계적 파라미터 불확실성 ΔH 가 포함된 행렬 $\tilde{H} = H + \Delta H$ 이다. 즉,

$$y = [\tilde{H} - \Delta H]x + v \quad (44)$$

부가적으로 ΔH 의 통계적 특성에 관한 사전정보가 알려져 있다고 가정한다.

$$E[\Delta H R^{-1} \Delta H] = W, \quad E[\Delta H^T R^{-1} v] = V \quad (45)$$

만일 통계적 파라미터 불확실성 ΔH 를 무시하고, \tilde{H} 를 사용하여 공칭 최소자승 추정기를 설계하면, 추정치에 필연적으로

비례오차(scale-factor error) 및 편향오차(bias error)가 포함됨을 알 수 있다.

$$\begin{aligned} \hat{x}_{LS} &= (\tilde{H}^T R^{-1} \tilde{H})^{-1} \tilde{H}^T R^{-1} y \\ &= (\tilde{H}^T R^{-1} \tilde{H})^{-1} \tilde{H}^T R^{-1} ((\tilde{H} - \Delta H)x + v) \quad (46) \\ &= (I - \alpha)x + \beta \end{aligned}$$

여기서

$$\begin{aligned} \alpha &\equiv (\tilde{H}^T R^{-1} \tilde{H})^{-1} \tilde{H}^T R^{-1} \Delta H, \\ \beta &\equiv (\tilde{H}^T R^{-1} \tilde{H})^{-1} \tilde{H}^T R^{-1} v \end{aligned}$$

위의 결과로부터, 비례오차는 통계적 파라미터 불확실성의 자기상관에 의한 것임을, 편향오차는 통계적 파라미터 불확실성과 측정잡음의 상호상관에 기인한 것임을 알 수 있다. 통계적 파라미터 불확실성에 의한 추정성능 저하문제를 해결하기 위해 비례오차 및 편향오차의 보상 개념을 고려한다. (46)에 확률수렴(convergence in probability) 개념을 적용하면,

$$\begin{aligned} \text{plim } \alpha &= \text{plim}(\tilde{H}^T R^{-1} \tilde{H})^{-1} \cdot W, \quad (47) \\ \text{plim } \beta &= \text{plim}(\tilde{H}^T R^{-1} \tilde{H})^{-1} \cdot V, \end{aligned}$$

여기서 plim 은 확률극한(probability limit)을 의미한다.

(47)로부터 비례오차 및 편향오차의 추정치를 얻을 수 있다.

$$\hat{\alpha} = (\tilde{H}^T R^{-1} \tilde{H})^{-1} W, \quad \hat{\beta} = (\tilde{H}^T R^{-1} \tilde{H})^{-1} V \quad (48)$$

(48)을 이용하여 공칭 최소자승 추정오차가 보상된 새로운 상태추정치를 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$\begin{aligned} \hat{x}_{RLS} &= (I - \hat{\alpha})^{-1} (\hat{x}_{LS} - \hat{\beta}) \\ &= (\tilde{H}^T R^{-1} \tilde{H} - W)^{-1} (\tilde{H}^T R^{-1} y - V) \end{aligned} \quad (49)$$

이때, 강인 최소자승 추정치 (49)가 존재하기 위한 충분 조건은 다음과 같다.

$$P^{-1} \equiv \tilde{H}^T R^{-1} \tilde{H} - W > 0 \quad (50)$$

(49)는 공칭 최소자승 추정치의 오차보상 개념을 통해 얻어진 것이므로, 강인 최소자승 추정치의 존재조건 (50)은 공칭 최소자승 추정치의 존재조건 $\tilde{H}^T R^{-1} \tilde{H} > 0$ 을 포함하는 것이어야 한다. 일반적으로 $W \geq 0$ 이므로, 조건 (50)은 공칭 최소자승 추정치의 존재를 암시하는 것이다.

여타의 강인 상태추정기법과 달리, 강인 최소자승 추정치 \hat{x}_{RLS} 의 가중 상태추정오차는 영평균 특성을 갖는다.

$$E[P^{-1}(\hat{x}_{RLS} - x)] = 0$$

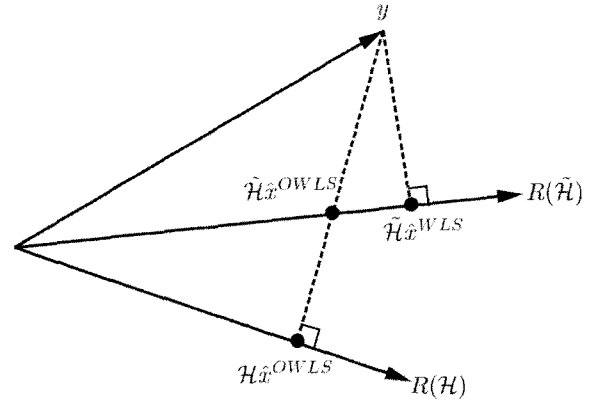


그림 2. 최적/공칭 최소자승 추정치의 기하학적 관계

더 나아가, 약수렴 관점에서 \hat{x}_{RLS} 는 무편향성을 갖고 있다고 할 수 있다.

$$\begin{aligned} \text{plim } \hat{x}_{RLS} &= \text{plim } P^{-1} \text{plim}(\tilde{H}^T R^{-1} ((\tilde{H} - \Delta H)x + v) - V) \\ &= \text{plim } P^{-1} \cdot Px \approx x \end{aligned} \quad (51)$$

3.1절의 다단계 통계최적화 기법을 이용하여 강인 칼만필터를 설계하기 위해서는 강인 최소자승 추정기법의 목적함수가 필요하다. 강인 최소자승 추정기법의 목적함수는 다음과 같이 부정 이차 함수 형태를 갖는다.

$$\begin{aligned} J_{RLS} &= \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{bmatrix} \tilde{H} \\ -I \end{bmatrix} x \begin{bmatrix} R^{-1} & 0 \\ 0 & W \end{bmatrix} \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{bmatrix} \tilde{H} \\ -I \end{bmatrix} x \\ &+ (x^T V + V^T x) \end{aligned} \quad (52)$$

위의 부정(indefinite) 이차 함수의 최소점 및 이의 존재조건은 (49), (50)과 동일하다.

마지막으로, 제시된 강인 최소자승 추정기법에 대한 기하학적 의미를 고찰해보도록 한다. 편의상 $R = I$ 로 가정하고, 확률 벡터공간에서의 내적은 $\langle p, q \rangle = E\{p^T q\}$ 로 정의한다. 통계적 파라미터 불확실성을 포함하지 않은 측정행렬 H 를 사용하여 계산된 최적 최소자승 추정치 (4)와 통계적 파라미터 불확실성을 포함한 측정행렬 \tilde{H} 를 이용해 산출된 공칭 최소자승 추정치 (46)으로부터 다음 직교 방정식을 얻을 수 있다.

$$E[H^T (y - H\hat{x}_{OLS})] = 0 \rightarrow \mathcal{R}(H) \perp (y - H\hat{x}_{OLS}) \quad (53)$$

$$E[\tilde{H}^T (y - \tilde{H}\hat{x}_{LS})] = 0 \rightarrow \mathcal{R}(\tilde{H}) \perp (y - \tilde{H}\hat{x}_{LS}) \quad (54)$$

(53)은 다음과 같이 다시 쓸 수 있다.

$$E[H^T(y - [\tilde{H} - \Delta H]\hat{x}_{OLS})] = E[H^T(y - \tilde{H}\hat{x}_{OLS})] \quad (55)$$

즉,

$$\mathcal{R}(H) \perp (y - \tilde{H}\hat{x}_{OLS}) \quad (56)$$

그럼 2는 (53)-(55)로 기술되는 상태추정치들 간의 기하학적 관계를 나타낸 것이다. 최적 최소자승 추정치는 H 의 열공간 위로의 정사영을 이용하여 구현될 수 있지만, 이는 행렬 H 가 가용하지 않은 상황에서는 불가능한 일이다. 다행히도, 그림에서 확인할 수 있듯이 최적 최소자승 추정치는 통계적 파라미터 불확실성을 포함한 행렬 \tilde{H} 의 열공간 위로의 사교사영(oblique projection)과 밀접한 관계를 갖고 있으므로, 이에 착안하여 구현 가능성을 타진해 볼 수 있다. (55)에 관계식 $H = \tilde{H} - \Delta H$ 를 대입하여 정리하면,

$$E[\tilde{H}^T(y - \tilde{H}\hat{x}_{OLS})] = -W\hat{x}_{OLS} + V. \quad (57)$$

강인 최소자승 추정식 (49)로부터 (58)이 만족되므로, 강인최소자승 추정치는 최적 최소자승 추정치와 동일한 기하학적 속성을 갖고 있음을 유추할 수 있다.

$$E[\tilde{H}^T(y - \tilde{H}\hat{x}_{RLS})] = -W\hat{x}_{RLS} + V, \quad (58)$$

이상으로부터 제시된 강인 최소자승 추정치는 기하학적 관점에서 볼 때, 측정벡터 y 의 $\mathcal{R}(\tilde{H})$ 위로의 사교사영으로 정의될 수 있다.

5. 결론

본 고에서는 기존의 확률론적 관점에서의 상태추정기법과 더불어 선형 상태추정 이론의 양대 축을 이루고 있는 최소자승 추정 개념을 도입하여 칼만필터 이론을 재조명 하였다. 다단계 통계적 최적화 기법, 이노베이션 기법 및 에너지 최적 제어기와 쌍대성을 이용한 칼만필터 유도방법이 소개되었다. 또한 최소자승 추정 개념의 확장 가능성을 보이고자 최근 개발된 강인 상태추정 이론을 간략히 소개하였다. 언급된 최소자승 기반 선형 상태추정 이론은 기존의 추정 기법을 보완, 대체하는 새로운 추정이론의 개발을 위한 다양한 담론 형성을 가능케 할 것으로 기대된다.

참고문헌

[1] K.G. Gauss, *Theory of Motion of the Heavenly Bodies*,

Dover, 1963.

- [2] R.A. Fisher, "On an absolute criterion for fitting frequency curves," *Messenger of Math.*, vol. 41, p. 155, 1912.
- [3] A.N. Kolmogorov, "Interpolation and extrapolation of stationary random sequences," *Izvestiya Akademii Nauk SSSR, Seriya Matematicheskii*, vol. 5, pp. 1-40, 1941. (in Russian); reprint *Selected works of A.N. Kolmogorov, Probability theory and mathematical statistics, II*, Kluwer, 1992.
- [4] N. Wiener, "The extrapolation, interpolation and smoothing of stationary time series," *John Wiley & Sons, Inc.*, 1949. (original classified version nicknamed 'Yellow peril' is published in 1942)
- [5] R.E. Kalman, "A new approach to linear filtering and prediction problems," *J. Basic Eng.*, vol. 82D, pp. 35-45, 1960.
- [6] J.M. Morris, "The Kalman filter: A robust estimator for some classes of linear quadratic problems," *IEEE Trans. Information Theory*, vol. 22, no. 5, pp. 526-534, 1976.
- [7] Y.C. Ho and R.C.K. Lee, "A Bayesian approach to problems in stochastic estimation and control," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, pp. 333-339, 1964.
- [8] H. Cox, "On the estimation of state variables and parameters for noisy dynamic systems," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, pp. 5-12, 1964.
- [9] H.E. Rauch, F. Tung and C.T. Striebel, "Maximum likelihood estimates of linear dynamic systems," *AIAA Journal*, vol. 3, no. 8, pp. 1445-1450, 1965.
- [10] H.W. Sorenson, "Kalman filtering techniques", *Advances in Control Systems*, vol. 3, pp. 219-292, 1966.
- [11] L. Xie, Y.C. Soh, and C.E. de Souza, "Robust Kalman filtering for uncertain discrete-time systems", *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 39, pp. 1115-1121, 1994.
- [12] I.R. Petersen and A.V. Savkin, *Robust Kalman Filtering for Signals and Systems with Large Uncertainties*, Birkhauser, 1999.
- [13] G.C. Goodwin, M.M. Seron, and J.A. de Dona, *Constrained Control and Estimation*, Springer, 2005.
- [14] W.S. Ra, I.H. Whang, J.Y. Ahn, and J.B. Park, "Recursive robust least squares estimator for time-varying linear

systems with a noise corrupted measurement matrix," *IET Control Theory Appl.*, vol. 1, no. 1, pp.104-112, 2007.

- [15] W.S. Ra, and I.H. Whang, "Stochastic robust Kalman filtering for linear time-varying systems with a multiplicative measurement noise," *IFAC World Congress*, 2008.
- [16] D.G. Luenberger, *Optimization by Vector Space Methods*, John Wiley & Sons, Inc., 1969.
- [17] A.E. Bryson, and Y. Ho, *Applied Optimal Control: Optimization, Estimation and Control*, John Wiley & Sons, Inc., 1975.
- [18] T. Kailath, "The innovation approach to least squares estimation - Part I: Linear filtering in additive white noise," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 13, pp. 646-655, 1968.
- [19] T. Kailath, "The innovations approach to detection and estimation theory," *Proc. IEEE*, vol. 58, pp. 680-695, 1970.
- [20] K. Furuta, "Alternative solution of discrete-time Kalman filter," *Systems & Control Letters*, vol. 22, pp. 429-435, 1994.

저자약력



나원상

- 1998년 연세대학교 전기공학과 학사.
- 2000년 연세대학교 전기 및 컴퓨터공학과 석사.
- 2000년~현재 국방과학연구소 유도조종부 선임연구원.
- 관심분야 : 강인 상태추정이론, 유도조종기법.



황익호

- 1988년 서울대학교 제어계측공학과 학사.
- 1990년 서울대학교 제어계측공학과 석사.
- 1995년 서울대학교 제어계측공학과 박사.
- 1995년~현재 국방과학연구소 유도조종부 책임연구원.
- 관심분야 : 유도조종기법, 추정론, 표적추적필터.