경사각을 갖는 관성항법시스템 초기 정밀정렬의 오차 분석

Error Analysis of Initial Fine Alignment for Non-leveling INS

조 성 윤*
(Seong Yun Cho)

Abstract : In this paper, performance of the initial alignment for INS whose attitude is not leveled is investigated. Observability of the initial alignment filter is analyzed and estimation errors of the estimated state variables are derived. First, the observability is analyzed using the rank test of observability matrix and the normalized error covariance of the Kalman filter based on the 10-state model. In result, it can be seen that the accelerometer biases on horizontal axes are unobservable. Second, the steady-state estimation errors of the state variables are derived using the observability equation. It is verified that the estimates of the state variables have errors due to the unobservable state variables and the non-leveling tilt angles of a vehicle containing the INS. Especially, this paper shows that the larger the tilt angles of the vehicle are, the larger the estimation errors corresponding to the sensor biases are. Finally, it is shown that the performance of the 8-state model excepting the accelerometer biases on horizontal axes is better than that of the 10-state model in the initial alignment by simulation.

Keywords : INS, initial fine alignment, Kalman filter, observability, estimation error

I. 서론

관성항법시스템은 군용, 항행용으로 주로 사용되어 왔으며 유도무기를 포함한 군용 무기 및 운항체(vehicle)의 중요 항법장치로 사용되고 있다. 최근에는 민용 텔레매틱스/LBS를 위한 항법장치로 GPS와 더불어 사용되고 있다. 기존의 관성항법장치는 중· 고급의 관성센서를 사용하여 구성함으로써 고성능의 항법정보를 제공하였으나 고가이므로 민용 항법장치로는 사용하기 어렵다. 또한 소모성의 무기에 장착되는 관성센서 또한 저가의 모델을 사용한 응용이 늘어나고 있다. 이런 요구사항은 MEMS 기술의 발달에 의하여 실현 가능하게 되고 있다. 관성항법시스템은 추측항법(DR: Dead Reckoning)의 메커니즘과 같이 적분을 통한 항법정보를 갱신하므로 관성항법시스템을 탑재한 운항체의 초기 정보는 관성항법시스템의 성능에 매우 중요한 역할을 한다[1-4].

관성항법시스템의 초기정렬은 운항체 동체 좌표계로부터 항법 좌표계로의 좌표변환 행렬을 결정하는 것이다[5,6]. 그리고 초기 정밀정렬은 운항 전에 관성센서의 바이어스 또한 추정하여 정확한 자세 정보를 계산하기 위해 필터를 구동하는 것이다. 초기 자세오차와 관성센서 바이어스는 관성항법시스템의 주된 오차 요원이다. 초기정렬의 중요성 때문에 지난 수십 년간 많은 연구가 이루어 졌으며 중요 연구 테마는 초기정렬 필터의 가관측성 분석, 오차 추정 및 추정 오차 분석, 등이 있다[5-11].

초기정렬의 성능은 운항중 정렬의 성능에 영향을 미친다. 운항체가 운항할 때, 관성센서의 오차는 확장칼만필터(extended Kalman filter)와 같은 추정 필터를 사용하여 추정한다. 초기정렬의 결과에 큰 오차가 존재하는 경우 확장칼만필터의 특성상 운항중 정렬 시 필터의 발산을 야기할 수 있다[12]. 그러므로 초기정렬은 반드시 정밀하게 수행되어야 한다. 그러나, 초기정렬은 필터의 가관측성에 의하여 한계를 갖는다.

초기정렬 시 필터의 측정치는 운항체의 0속도 정보이다[9-11]. 필터 특성은 측정치에 영향을 받는다. 필터의 중요한 특성 중 하나가 가관측성이다. 가관측성은 완전 가관측성과 가관측성 정도 등으로 분석될 수 있다[9]. 완전 가관측성은 가관측 행렬의 계수 검사(rank test)를 통해 분석될 수 있다. 시불변(time-invariant) 시스템에서는 계수 검사에서 기본 가관측 행렬을 사용할 수 있으나, 시변(time-varying) 시스템에서는 TOM(Total Observability Matrix) 또는 SOM(Stripped Observability Matrix)을 사용해야 한다[9,13]. 가관측성 정도는 필터의 오차 공분산 정보를 사용하여 분석할 수 있다[14]. 지금까지 이와 관련된 여러 연구 결과가 발표되었다. 이 결과들의 대부분은 식 전개의 편의를 위해 동체 좌표계와 항법 좌표계가 동일하다는 가정을 통해 식을 정리하였다[6,7,10]. 그러나 본 논문에서는 운항체의 경사각에 대한 특정 가정 없이 추정오차 식을 유도한다. 또한 기존 연구에서는 수직축 속도 및 가속도계 바이어스를 제외한 모델을 사용한 반면 본 논문에서는 수직축 자세 및 자이로 바이어스를 제외한 모델을 사용한다. 그 이유는 MEMS 형 자이로를 사용하는 관성항법시스템에서 초기 방위각 오차 추정이 불가능하기 때문이다. 초기정렬 필터의 가관측성을 가관측 행렬과 오차 공분산 행렬 기반으로 분석한다. 그 결과 가관측 하지 않은 상태변수가 수평축 가속도계 바이어스가 되는 것을 확인한다. 그리고 가관측 식을 통해 필터의 추정 오차를 유도한다. 그 결과 가관측한 상태변수의 추정 오차는 가관측 하지 않은 상태변수인 수평축 가속도계 바이어스 추정 오차와 운항체의 경사각에 의하여 발생하는 것을 확인한다. 이를 기반으로 초기정렬에서 수평축 가속도계 바이어스 추정 상태변수를 제외한 8차 모델 필터가 10차 모델 필터보다 우수함을 보인다. 제안된 결과의 성능을 시뮬레이션을 통해 검증한다.

* 책임저자(Corresponding Author)
논문접수 : 2007. 8. 6., 채택확정 : 2008. 3. 6.
조성윤 : 한국전자통신연구원 텔레매틱스연구부(sycho@etri.re.kr)
※ 본 연구는 정보통신부 및 정보통신연구진흥원의 IT신성장동력핵심기술 개발사업의 일환으로 수행하였음(2007-F-040-01, 실내외 연속측위 기술 개발).

본 논문의 2장에서는 관성항법시스템의 초기정렬용 오차 모델을 정리하고, 이 오차 모델을 갖는 칼만필터의 가관측성을 3장에서 분석한다. 4장에서는 이 칼만필터가 추정한 상태변수의 추정오차를 분석한다. 5장에서는 시뮬레이션을 통해 앞에서 분석한 추정오차와 8차 필터의 성능을 증명하고, 마지막 장에서 결론을 맺는다.

II. 관성항법시스템 초기정렬 오차 모델

관성항법시스템의 해석을 위해 먼저 좌표계 정의를 해야 한다. 관성 좌표계(inertial frame)는 관성센서의 기준 좌표계로 지구 중심을 원점으로 지구 자전과 상관없이 고정된 좌표계이며, 항법 좌표계(navigation frame)는 지역 수평 좌표계(local level frame)라고도 하며 항체(vehicle)의 무게중심을 원점으로 북쪽(N), 동쪽(E), 그리고 수직 아래(D) 방향을 각각 축으로 한다. 그리고 동체 좌표계(body frame)는 항법 좌표계와 원점은 일치하며 항체의 앞쪽(x), 항체의 오른쪽(y), 그리고 이 두 축과 직각을 이루는 항체의 아래 방향(z)을 각각 축으로 이루어진다[3,15].

정지상태에서 가속도계와 자이로 출력을 통해 갱신되는 관성항법시스템의 속도 및 자세 식은 다음과 같다[3,15].

$$\dot{V}^n = C_b^n f^b - 2\omega_{ie}^n \times V^n + g^n, \tag{1}$$

$$\dot{q} = \frac{1}{2} q * \left\{ \omega_{ib}^b - C_b^n \omega_{ie}^n \right\}, \tag{2}$$

여기서 $V^n := \begin{bmatrix} V_N & V_E & V_D \end{bmatrix}^T$ 은 항법 좌표계 상의 속도벡터이며, C_b^n 은 동체 좌표계에서 항법 좌표계로의 변환을 위한 방향 코사인 행렬, g^n 은 중력벡터, q 는 쿼터니언, 그리고 f^b 와 ω_{ib}^b 는 각각 가속도계 출력과 자이로 출력을 나타낸다. 그리고 ω_{ie}^n 는 항법 좌표계 상에 나타나는 지구 자전 각속도 벡터로 다음과 같이 계산된다.

$$\begin{aligned} \omega_{ie}^n &:= \begin{bmatrix} \Omega_N & 0 & \Omega_D \end{bmatrix}^T \\ &= \begin{bmatrix} \Omega_{ie} \cos L & 0 & -\Omega_{ie} \sin L \end{bmatrix}^T, \end{aligned} \tag{3}$$

여기서 L 은 항체가 위치한 곳의 위도이며, Ω_{ie} 는 지구자전 각속도로 약 $2\pi/86164\ [rad/s]$ 이다.

관성항법시스템 오차 모델은 관성항법 식의 선형 섭동법(linear perturbation)을 통해 획득할 수 있다. 속도오차 전파(propagation) 모델은 (1)의 섭동을 통해 다음과 같이 유도된다.

$$\begin{aligned} \delta\dot{V}^n &\cong \delta C_b^n f^b + C_b^n \delta f^b - 2\omega_{ie}^n \times \delta V^n \\ &= C_b^n f^b \times \phi^n + C_b^n \delta f^b - 2\omega_{ie}^n \times \delta V^n \\ &:= F_{va}\phi^n + C_b^n \delta f^b + F_{vv}\delta V^n, \end{aligned} \tag{4}$$

여기서 $\delta V^n = \begin{bmatrix} \delta V_N & \delta V_E & \delta V_D \end{bmatrix}^T$ 와 $\phi^n = \begin{bmatrix} \phi_N & \phi_E & \phi_D \end{bmatrix}^T$ 는 각각 항법 좌표계 상의 속도오차와 자세오차를 의미하며, δf^b 는 동체 좌표계 상의 가속도계 오차를 나타낸 것이며 중력 가속도는 정확하게 계산되는 것으로 가정하였다. 그리고 F_{vv} 와 F_{va} 는 다음과 같이 정의된다.

$$F_{vv} := -2\omega_{ie}^n \times = \begin{bmatrix} 0 & 2\Omega_D & 0 \\ -2\Omega_D & 0 & 2\Omega_N \\ 0 & -2\Omega_N & 0 \end{bmatrix}, \tag{5}$$

$$F_{va} := C_b^n f^b \times = \begin{bmatrix} 0 & -f_D & f_E \\ f_D & 0 & -f_N \\ -f_E & f_N & 0 \end{bmatrix}, \tag{6}$$

여기서 $\begin{bmatrix} f_N & f_E & f_D \end{bmatrix}^T$ 는 항법 좌표계 상으로 변환된 가속도계 출력값을 의미한다.

(4)에서 정의된 자세오차는 실재 항법 좌표계와 계산된 항법 좌표계 사이의 미소 오차각을 의미하며 다음과 같은 전파 모델을 갖는다[16].

$$\begin{aligned} \dot{\phi} &\cong -\omega_{in}^n \times \phi - C_b^n \delta\omega_{ib}^b \\ &:= F_{aa}\phi - C_b^n \delta\omega_{ib}^b, \end{aligned} \tag{7}$$

여기서 $\delta\omega_{ib}^b$ 는 동체 좌표계 상의 자이로 오차를 의미하며, F_{aa} 는 다음과 같이 정의된다.

$$F_{aa} := -\omega_{in}^n \times = \begin{bmatrix} 0 & \Omega_D & 0 \\ -\Omega_D & 0 & \Omega_N \\ 0 & -\Omega_N & 0 \end{bmatrix} \tag{8}$$

가속도계와 자이로 오차는 MEMS 급으로 고려하여 간략하게 다음과 같이 모델링 된다.

$$\delta f^b = \nabla^b + w_a,\ w_a \sim N(0, Q_a), \tag{9}$$

$$\delta\omega_{ib}^b = \varepsilon^b + w_g,\ w_g \sim N(0, Q_g), \tag{10}$$

여기서 ∇^b 와 ε^b 는 각각 가속도계와 자이로의 바이어스로 MEMS 급 관성센서에서 가장 두드러지게 나타나는 오차요인으로 일반적으로 이 오차를 추정 보상한다. 그리고 w 는 백색 가우시안 잡음을 의미한다. 바이어스는 다음과 같이 랜덤 상수이다.

$$\dot{\nabla}^b = 0,\ \nabla^b(0) \sim N(0, P_\nabla), \tag{11}$$

$$\dot{\varepsilon}^b = 0,\ \varepsilon^b(0) \sim N(0, P_\varepsilon). \tag{12}$$

확장칼만필터를 사용하여 관성항법시스템의 오차를 추정하는 경우, 시스템 모델은 위에서 나타낸 오차식을 사용하여 설계된다. 초기정렬 시 수직축 자세오차와 z축 자이로 바이어스의 가관측성 정도가 약하므로[9] 본 논문의 상태변수에서 제외한다. 특히 MEMS 형 자이로를 사용하는 경우 이 두 오차를 초기정렬 시에 추정하는 것은 불가능하다. 따라서 본 논문에서는 초기정렬 모델을 다음과 같이 10차로 하여 추정오차를 분석한다.

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &:= Fx(t) + w(t),\ w(t) \sim N(0, Q) \\ &= \left[\begin{array}{cc|cc} F_{vv} & \bar{F}_{va} & C_b^n & 0_{3\times 2} \\ 0_{2\times 3} & \bar{F}_{aa} & 0_{2\times 3} & -\bar{C}_b^n \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{0_{5\times 5}} & \multicolumn{2}{c}{0_{5\times 5}} \end{array}\right] x(t) + \left[\begin{array}{c} w_a \\ w_g \\ \hline 0_{5\times 1} \end{array}\right], \end{aligned} \tag{13}$$

여기서 $0_{a\times b}$ 는 $a \times b$ 영 행렬이다. 그리고,

$$x := \left[\delta V^n \mid \phi^n \mid \nabla^b \mid \varepsilon^b\right]^T = \left[\delta V_N \quad \delta V_E \quad \delta V_D \mid \phi_N \quad \phi_E \quad \nabla_x \quad \nabla_y \quad \nabla_z \mid \varepsilon_x \quad \varepsilon_y\right]^T, \tag{14}$$

$$\bar{F}_{va} = \begin{bmatrix} 0 & -f_D \\ f_D & 0 \\ -f_E & f_N \end{bmatrix}, \tag{15}$$

$$\bar{F}_{aa} = \begin{bmatrix} 0 & \Omega_D \\ -\Omega_D & 0 \end{bmatrix}, \tag{16}$$

$$C_b^n = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\phi\sin\theta & \cos\phi\sin\theta \\ 0 & \cos\phi & -\sin\phi \\ -\sin\theta & \sin\phi\cos\theta & \cos\phi\cos\theta \end{bmatrix}, \tag{17}$$

$$\bar{C}_b^n = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\phi\sin\theta \\ 0 & \cos\phi \end{bmatrix}, \tag{18}$$

여기서 ϕ 와 θ 는 각각 롤각과 피치각을 의미한다. 수직축 자세오차를 추정하지 않으며 단독 관성항법시스템에서 초기 방위각 정보를 추정할 수 없으므로 방위각을 0으로 설정하고 방향 코사인 행렬을 롤각과 피치각 만으로 나타내었다.

초기정렬 동안 사용 가능한 측정치는 속도오차이므로 다음과 같이 측정식을 구성할 수 있다.

$$z(t) := Hx(t) + v(t), \quad v(t) \sim N(0, R) = \left[I_{3\times3} \mid 0_{3\times7}\right]x(t) + v(t), \tag{19}$$

여기서 $I_{3\times3}$ 은 3×3 단위행렬을 의미하며 v 는 측정오차로 정지 시 항체의 진동 등에 의한 잡음으로 간주한다.

III. 가관측성 분석

1. 가관측 행렬의 계수 검사

필터의 가관측성은 측정치를 사용하여 상태변수를 추정할 수 있는지 여부에 대한 지수이다. 필터의 완전 가관측성은 계수 검사를 통해 분석할 수 있다[9].

초기정렬에서 시스템 행렬은 시불변이다. 따라서 (13)에서의 시스템 행렬 F 와 (19)에서의 측정치 행렬 H 를 갖는 시스템의 기본 가관측 행렬 O 는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{bmatrix} z \\ \dot{z} \\ \vdots \\ z^{(n-1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H \\ HF \\ \vdots \\ HF^{n-1} \end{bmatrix} x \quad \Leftrightarrow \quad Z = \mathrm{O}x \tag{20}$$

가관측 행렬의 계수가 시스템의 차수인 n 이면 이 시스템은 완전 가관측하다. 그렇지 않으면 일부 상태변수 또는 상태변수의 조합만 가관측하게 된다. (20)을 구체화 시키기 위해 II장의 식을 사용하여 다음과 같이 전개한다.

$$F = \left[\begin{array}{cc|cc} F_{vv} & \bar{F}_{va} & C_b^n & 0_{3\times2} \\ 0_{2\times3} & \bar{F}_{aa} & 0_{2\times3} & -\bar{C}_b^n \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{0_{5\times5}} & \multicolumn{2}{c}{0_{5\times5}} \end{array}\right], \tag{21a}$$

$$H = \left[I_{3\times3} \mid 0_{3\times7}\right]. \tag{21b}$$

그리고 정지상태이므로 Z 는 0으로 구성된 벡터이다. 따라서,

$$z = \left[I_{3\times3} \mid 0_{3\times7}\right] x = 0_{3\times1}, \tag{22a}$$

$$\dot{z} = \left[I_{3\times3} \mid 0_{3\times7}\right]\left[\begin{array}{cc|cc} F_{vv} & \bar{F}_{va} & C_b^n & 0_{3\times2} \\ 0_{2\times3} & \bar{F}_{aa} & 0_{2\times3} & -\bar{C}_b^n \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{0_{5\times5}} & \multicolumn{2}{c}{0_{5\times5}} \end{array}\right] x = \left[F_{vv} \quad \bar{F}_{va} \quad C_b^n \quad 0_{3\times2}\right] x = 0_{3\times1}, \tag{22b}$$

$$\ddot{z} = \left[F_{vv} \quad \bar{F}_{va} \quad C_b^n \quad 0_{3\times2}\right]\left[\begin{array}{cc|cc} F_{vv} & \bar{F}_{va} & C_b^n & 0_{3\times2} \\ 0_{2\times3} & \bar{F}_{aa} & 0_{2\times3} & -\bar{C}_b^n \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{0_{5\times5}} & \multicolumn{2}{c}{0_{5\times5}} \end{array}\right] x = \left[F_{vv}^2 \quad F_{vv}\bar{F}_{va} + \bar{F}_{va}\bar{F}_{aa} \quad F_{vv}C_b^n \quad -\bar{F}_{va}\bar{C}_b^n\right] x = 0_{3\times1}, \tag{22c}$$

$$z^{(n-1)} = \left[F_{vv}^{n-1} \quad F_{vv}^{n-2}\bar{F}_{va} + F_{n-1}\bar{F}_{aa} \quad F_{vv}^{n-1}C_b^n \quad -F_{n-1}\bar{C}_b^n\right] x \equiv \left[F_{vv}^{n-1} \quad F_{n-1} \quad F_{vv}^{n-1}C_b^n \quad -F_{n-2}\bar{C}_b^n\right] x = 0_{3\times1}, \tag{22d}$$

여기서 $F_{n-k} = F_{vv}^{n-k-1}\bar{F}_{va} + F_{n-k-1}\bar{F}_{aa}$.

(22)를 (20)에 대입한 다음, 행렬의 계수에 영향을 미치지 않는 열 연산(row manipulation)을 통해 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{bmatrix} z \\ \dot{z} - F_{vv}z \\ \left(\ddot{z} - F_{vv}\dot{z}\right)/f_D \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{3\times3} & 0_{3\times2} & 0_{3\times3} & 0_{3\times2} \\ 0_{3\times3} & \bar{F}_{va} & C_b^n & 0_{3\times2} \\ 0_{3\times3} & \bar{F}_{va}\bar{F}_{aa}/f_D & 0_{3\times3} & -\bar{F}_{va}\bar{C}_b^n/f_D \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 0_{3\times1} \\ 0_{3\times1} \\ 0_{3\times1} \\ \vdots \end{bmatrix} \tag{23}$$

(23)에서 가관측 행렬의 구성요소를 임의의 위치(예를 들어 위도 37도)와 임의의 자세에서의 값을 넣고 컴퓨터 시뮬레이션을 수행하면 다음과 같다.

$$rank\left[\mathrm{O}\right] = 8 < 10 \tag{24}$$

즉 가관측 행렬의 계수는 시스템 차수인 10보다 작다. 그러므로 이 시스템은 완전 가관측 하지 않으며 2개의 가관측하지 않은 상태변수가 있을 수 있다. 가관측한 상태변수 및 상태변수의 조합을 확인하기 위해 (14)를 (23)에 대입하면 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\mathrm{O}x = \left[\begin{array}{c} \delta V^n \\ \hline \bar{F}_{va}\phi^n + C_b^n\nabla^b \\ \hline \bar{F}_{va}\bar{F}_{aa}\phi^n / f_D - \bar{F}_{va}\bar{C}_b^n\varepsilon^b / f_D \end{array}\right] = 0_{9\times1} \tag{25}$$

그러나 (25)를 통해 가관측한 상태변수를 쉽게 찾기힘들다. 가관측 하지 않은 상태변수를 분리하기 위해 가관측성 정도를 분석한다.

2. 가관측성 정도(degree of observability) 분석

가관측 행렬 계수 검사는 단지 시스템의 완전 가관측성을 yes-no 형태로 알려준다. 이에 반해 가관측성 정도는 상태변수의 오차 수렴에 대한 정보를 제공한다. 가관측성 정도를 분석하는 방법 중 하나는 오차 공분산 행렬을 분석하는 것이다[14]. 오차 공분산의 수렴 속도가 빠르면 해당 상태변수의 가관측성 정도가 높은 것으로 해석된다. 그림 1은 다음과 같

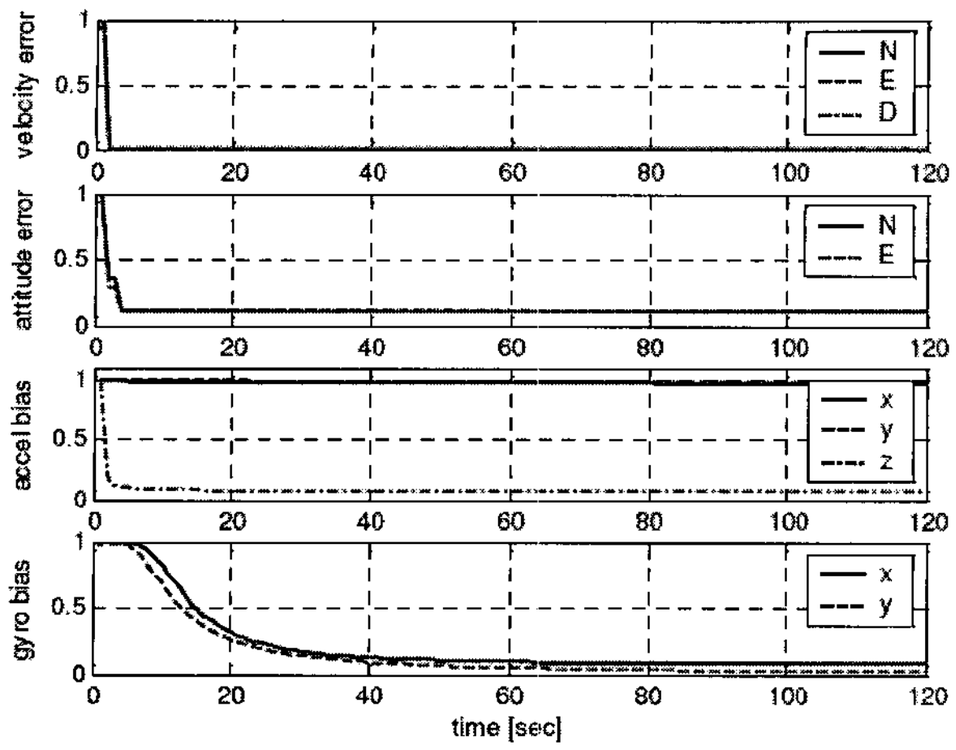

그림 1. 초기정렬 시 정규화된 오차 공분산 값.
Fig. 1. Normalized error covariance during stationary alignment.

이 초기정렬 필터의 정규화된(normalized) 오차 공분산 행렬의 대각 성분을 나타낸 것이다.

$$p_k(i) = P_k(i,i)/P_0(i,i), \quad i = 1,2,\cdots,10, \tag{26}$$

여기서 $P_k(i,i)$ 는 t_k 에서 오차 공분산 행렬의 (i,i) 대각 성분을 나타내며, 오차 공분산 행렬은 다음과 같이 측정치 갱신과 시간 전파를 통해 필터에서 계산된다.

$$P_k = \left(I - P_k^- H^T (HP_k^- H^T + R)^{-1} H\right) P_k^-, \tag{27}$$

$$P_k^- = e^{F\Delta T} P_{k-1} \left(e^{F\Delta T}\right)^T + Q, \tag{28}$$

여기서 I 는 10×10 단위행렬이고, ΔT 는 칼만필터의 측정치 갱신 간격이다.

그림 1을 통해 동체 좌표계 상의 수평축 가속도계 바이어스(∇_x, ∇_y)의 가관측성 정도가 다른 상태변수에 비해 약한 것을 알 수 있다. 그 이유는 이 변수에 해당하는 오차 공분산 행렬의 크기가 시간에 따라 줄어들지 않기 때문이다.

본 장에서 가관측성 계수 검사와 가관측성 정도 분석을 통해 두 축의 가속도계 바이어스 오차 추정이 초기정렬 시에 불가능 한 것을 파악하였다. 그러나 다른 상태변수의 추정치는 수렴은 하지만 추정 오차에 대한 정보는 알 수 없다. 다음 장에서 추정 오차를 분석하도록 한다.

IV. 추정 오차

관측 가능한 상태변수의 조합은 추정 문제를 갖는다. 상태변수 조합에서 하나의 상태변수가 가관측하지 않으면, 조합 내의 다른 상태변수 또한 추정 오차를 갖는다. 본 장에서 가관측한 8개의 상태변수의 추정 오차를 분석한다.

칼만필터에서 다음과 같은 가관측 식이 만족한다.

$$\hat{\mathrm{O}}\hat{x} = 0_{9\times1}, \tag{29}$$

여기서

$$\hat{\mathrm{O}} = \begin{bmatrix} I_{3\times3} & 0_{3\times2} & 0_{3\times3} & 0_{3\times2} \\ 0_{3\times3} & \hat{\bar{F}}_{va} & \hat{C}_b^n & 0_{3\times2} \\ 0_{3\times3} & \hat{\bar{F}}_{va}\bar{F}_{aa}/f_D & 0_{3\times3} & -\hat{\bar{F}}_{va}\hat{C}_b^n/f_D \end{bmatrix}, \tag{30}$$

여기서 $\hat{\bar{F}}_{va}, \hat{C}_b^n$, 그리고 $\hat{\bar{C}}_b^n$ 는 위치, 센서 출력, 추정된 오차 등을 통해 계산된 값이며, 자세오차와 가속도계 바이어스에 의하여 오차를 갖는다. 이 오차를 고려하는 경우 상태변수의 추정 오차의 크기를 유도하고 분석하는데 어려움을 갖게 된다. 또한 작은 자세오차와 가속도계 바이어스에 의해 상태변수 추정 오차에 미치는 영향이 크지 않으므로 본 논문에서는 분석의 편의를 위해 이런 오차들은 무시하였다. 따라서 (29)는 다음과 같이 나타낸다.

$$\mathrm{O}\hat{x} = 0_{9\times1} \tag{31}$$

(31)에서 (25)를 빼면 다음과 같이 된다.

$$\mathrm{O}\tilde{x} = \begin{bmatrix} \delta\tilde{V}^n \\ \hline \bar{\bar{F}}_{va}\tilde{\phi}^n + C_b^n\tilde{\nabla}^b \\ \hline \bar{\bar{F}}_{va}\bar{\bar{F}}_{aa}\tilde{\phi}^n/f_D - \bar{\bar{F}}_{va}\bar{C}_b^n\tilde{\varepsilon}^b/f_D \end{bmatrix} = 0_{9\times1}, \tag{32}$$

여기서 $\tilde{\alpha}$ 는 α 의 추정오차를 의미한다. 즉, $\tilde{\alpha} = \hat{\alpha} - \alpha$.

(15)-(18)을 (32)에 대입하면 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\mathrm{O}\tilde{x} = \begin{bmatrix} \delta\tilde{V}_N \\ \delta\tilde{V}_E \\ \delta\tilde{V}_D \\ \hline \left(-f_D\tilde{\phi}_E + \tilde{\nabla}_x\cos\theta \right. \\ \left. +\tilde{\nabla}_y\sin\phi\sin\theta + \tilde{\nabla}_z\cos\phi\sin\theta\right) \\ f_D\tilde{\phi}_N + \tilde{\nabla}_y\cos\phi - \tilde{\nabla}_z\sin\phi \\ \left(-f_E\tilde{\phi}_N + f_N\tilde{\phi}_E - \tilde{\nabla}_x\sin\theta \right. \\ \left. +\tilde{\nabla}_y\sin\phi\cos\theta + \tilde{\nabla}_z\cos\phi\cos\theta\right) \\ \hline \Omega_D\tilde{\phi}_N + \tilde{\varepsilon}_y\cos\phi \\ \Omega_D\tilde{\phi}_E - \tilde{\varepsilon}_x\cos\theta - \tilde{\varepsilon}_y\sin\phi\sin\theta \\ \left(-f_N\Omega_D\tilde{\phi}_N/f_D - f_E\Omega_D\tilde{\phi}_E/f_D + f_E\tilde{\varepsilon}_x\cos\theta/f_D \right. \\ \left. -(f_N\cos\phi - f_E\sin\phi\sin\theta)\tilde{\varepsilon}_y/f_D\right) \end{bmatrix}, \tag{33}$$
$$= 0_{9\times1}$$

여기서

$$\begin{bmatrix} f_N \\ f_E \\ f_D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_x\cos\theta + f_y\sin\phi\sin\theta + f_z\cos\phi\sin\theta \\ f_y\cos\phi - f_z\sin\phi \\ -f_x\sin\theta + f_y\sin\phi\cos\theta + f_z\cos\phi\cos\theta \end{bmatrix} \tag{34}$$

각 상태변수의 추정 오차를 계산하기 위해 (33)의 각 구성요소를 다음과 같이 분석한다.

(33)에서 속도오차의 추정오차는 다음과 같이 명확하게 나타난다.

$$\begin{bmatrix} \delta\tilde{V}_N \\ \delta\tilde{V}_E \\ \delta\tilde{V}_D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{35}$$

(33)의 4-6번째 구성요소를 분리해 내면 다음과 같다.

$$-f_D\tilde{\phi}_E + \tilde{\nabla}_x\cos\theta + \tilde{\nabla}_y\sin\phi\sin\theta + \tilde{\nabla}_z\cos\phi\sin\theta = 0, \tag{36a}$$

$$f_D\tilde{\phi}_N + \tilde{\nabla}_y\cos\phi - \tilde{\nabla}_z\sin\phi = 0, \quad (36b)$$

$$-f_E\tilde{\phi}_N + f_N\tilde{\phi}_E - \tilde{\nabla}_x\sin\theta + \tilde{\nabla}_y\sin\phi\cos\theta + \tilde{\nabla}_z\cos\phi\cos\theta = 0. \quad (36c)$$

(36)에서 $\tilde{\nabla}_x$와 $\tilde{\nabla}_y$를 가속도계 바이어스 추정오차 상수로 보면, $\tilde{\phi}_N$, $\tilde{\phi}_E$, 그리고 $\tilde{\nabla}_z$로 구성된 삼원일차 연립방정식이 됨을 알 수 있다. 따라서 이 연립방정식을 풀면 다음과 같이 세 상태변수의 추정 오차를 계산할 수 있다.

$$\tilde{\phi}_N = -\frac{f_x\sin\phi}{\lambda}\tilde{\nabla}_x - \frac{f_y\sin\phi + f_z\cos\phi}{\lambda}\tilde{\nabla}_y, \quad (37)$$

$$\tilde{\phi}_E = -\frac{f_x\cos\phi\sin\theta - f_z\cos\theta}{\lambda}\tilde{\nabla}_x - \frac{f_y\cos\phi\sin\theta - f_z\sin\phi\sin\theta}{\lambda}\tilde{\nabla}_y, \quad (38)$$

$$\tilde{\nabla}_z = -\frac{f_x}{f_z}\tilde{\nabla}_x - \frac{f_y}{f_z}\tilde{\nabla}_y, \quad (39)$$

여기서

$$\gamma = f_D\cos\phi\cos\theta + f_N\cos\phi\sin\theta - f_E\sin\phi, \quad (40)$$

$$\lambda = f_D\gamma = -f_xf_z\sin\theta + f_yf_z\sin\phi\cos\theta + f_z^2\cos\phi\cos\theta. \quad (41)$$

(33)의 7-9번째 구성요소를 분리해 내면 다음과 같다.

$$\Omega_D\tilde{\phi}_N + \tilde{\varepsilon}_y\cos\phi = 0, \quad (42a)$$

$$\Omega_D\tilde{\phi}_E - \tilde{\varepsilon}_x\cos\theta - \tilde{\varepsilon}_y\sin\phi\sin\theta = 0, \quad (42b)$$

$$-f_N\Omega_D\tilde{\phi}_N/f_D - f_E\Omega_D\tilde{\phi}_E/f_D + f_E\tilde{\varepsilon}_x\cos\theta/f_D - (f_N\cos\phi - f_E\sin\phi\sin\theta)\tilde{\varepsilon}_y/f_D = 0. \quad (42c)$$

(42a)에서 y축 자이로 바이어스 추정 오차를 다음과 같이 계산할 수 있다.

$$\tilde{\varepsilon}_y = -\Omega_D\sec\phi\cdot\tilde{\phi}_N \quad (43)$$

이 식을 (42b)에 대입하면 x축 자이로 바이어스 추정 오차를 다음과 같이 계산할 수 있다.

$$\tilde{\varepsilon}_x = \Omega_D\sec\theta\cdot\tilde{\phi}_E - \tilde{\varepsilon}_y\sin\phi\tan\theta = \Omega_D\tan\phi\tan\theta\cdot\phi_N + \Omega_D\sec\theta\cdot\phi_E \quad (44)$$

(43)과 (44)를 (42c)에 대입하면 만족하는 것을 확인할 수 있다.

따라서 다음과 같은 결론을 얻을 수 있다.

Remark 1: (37)과 (38)은 항법 좌표계 상의 수평축 자세 오차의 추정오차($\tilde{\phi}_N$, $\tilde{\phi}_E$)는 가관측하지 않은 상태변수(x축, y축 가속도계 바이어스)의 추정 오차와 운항체의 경사각(ϕ, θ)에 의하여 발생하는 것을 보여준다. 만약 운항체가 수평을 이루고 있으면 자세오차의 추정오차는 각각 $\tilde{\phi}_N = -\tilde{\nabla}_y/f_D$ 와 $\tilde{\phi}_E = \tilde{\nabla}_x/f_D$가 되며 개략 정렬(coarse alignment)의 결과와 유사하게 된다.

Remark 2: (39)를 통해 수직축 가속도계 바이어스 추정오차($\tilde{\nabla}_z$)는 가관측하지 않은 상태변수의 추정 오차와 가속도계 출력에 의하여 발생하는 것을 알 수 있다. 가속도계 출력은 운항체의 경사각과 가속도계 바이어스에 영향을 받는다. 운항체가 수평인 경우 이론상의 수평축 가속도계 출력이 0이므로 수직축 가속도계 바이어스를 정확하게 추정할 수 있음을 알 수 있다.

Remark 3: (43)과 (44)에서 Ω_D는 위도 37°에서 $-4.38851e-5[rad/s]$가 된다. 즉, 동체 좌표계 상의 수평축 자이로 바이어스는 작은 오차를 갖고 추정될 수 있다. 만약 운항체가 수평을 이루는 경우, 이 추정오차는 $\tilde{\varepsilon}_x = \frac{\Omega_D}{f_z}\tilde{\nabla}_x$ 와 $\tilde{\varepsilon}_y = \frac{\Omega_D}{f_z}\tilde{\nabla}_y$가 된다. 따라서 운항체의 경사각이 클수록 자이로 추정오차가 증가하게 된다.

Remark 4: [6,7,10]에서는 수식전개의 편의를 위해 동체 좌표계와 항법 좌표계가 일치하는 것으로 가정하였다. 따라서 센서 바이어스가 모두 항법 좌표계 상으로 표시된다. 그리고 설정한 상태변수는 수직채널을 무시한 10차 모델(δV_N, δV_E, ϕ_N, ϕ_E, ϕ_D, ∇_N, ∇_E, ε_N, ε_E, ε_D)을 기본으로 하였다. [6,10]에 나타나 있는 가관측하지 않은 상태변수는 ∇_N, ∇_E, 그리고 ε_E이다. 가관측한 상태변수 중 수평축 자세오차의 추정오차는 가속도계 바이어스에 의해 발생하며, 방위각 추정 오차는 동쪽방향 자이로 drift rate와 북쪽방향 자세 오차에 의해 발생한다고 되어있다. 그리고 [7]에서는 상태변수 변환 행렬을 통해 가관측하지 않은 상태변수가 ∇_E, ε_E, 그리고 ε_D이며, 수평축 자세 추정 오차는 수평축 가속도계 바이어스에 의해 발생한다고 되어 있다. 두 경우 모두 ε_E가 가관측하지 않은 상태변수로 언급되어 있다. 그 이유는 이 상태변수가 방위각 오차 추정 상태변수와 상관관계를 갖기 때문이다. MEMS 급 관성센서를 사용하는 INS에서 초기정렬 시 방위각 오차 추정 상태변수는 다위치정렬(multiposition alignment)이 아닌 경우 가관측성 정도가 약해 큰 추정오차를 갖는다[9]. 따라서 본 논문에서는 기본 모델을 참고문헌들과 다른 10차 모델(δV_N, δV_E, δV_D, ϕ_N, ϕ_E, ∇_N, ∇_E, ∇_D, ε_N, ε_E)을 사용하였다. 그 결과 이 상태 변수들 중 ∇_N과 ∇_E만 가관측하지 않다고 결론을 내렸다. 또한 운항체의 경사각에 의한 영향을 고려하여 다른 상태변수들의 추정오차를 분석하였다. 다른 상태변수들은 가관측하지 않은 상태변수와 운항체의 경사각에 의하여 추정 오차가 발생하는 것을 보였다.

이 10차 모델에서 수평축 가속도계 바이어스는 가관측하지 않으므로 잘못된 값으로 추정될 수 있으며 이로 인하여 다른 상태변수들의 추정오차에 미치는 영향이 달라질 수 있으므로 이 상태변수를 제외한 8차 모델을 사용하는 것이 10차 모델을 사용하는 것보다 좋은 결과를 제공할 수 있다. 결과적으로 8차 모델을 사용하는 필터에서는 수평축 가속도계 바이어스와 운항체의 자세에 의하여 다음과 같은 추정 오차를 갖는다.

$$\begin{bmatrix} \delta\tilde{V}_N \\ \delta\tilde{V}_E \\ \delta\tilde{V}_D \\ \tilde{\phi}_N \\ \tilde{\phi}_E \\ \tilde{\nabla}_z \\ \tilde{\varepsilon}_x \\ \tilde{\varepsilon}_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\left(f_x \sin\phi \nabla_{x0} \right. \\ \left. +(f_y \sin\phi + f_z \cos\phi)\nabla_{y0}\right)/\lambda \\ -\left((f_x \cos\phi \sin\theta - f_z \cos\theta)\nabla_{x0} \right. \\ \left. +(f_y \cos\phi \sin\theta - f_z \sin\phi \sin\theta)\nabla_{y0}\right)/\lambda \\ -\left(f_x \nabla_{x0} + f_y \nabla_{y0}\right)/f_z \\ \Omega_D \tilde{\phi}_N \tan\phi \tan\theta + \Omega_D \tilde{\phi}_E \sec\theta \\ -\Omega_D \tilde{\phi}_N \sec\phi \end{bmatrix}, \quad (45)$$

여기서 ∇_{x0} 와 ∇_{y0} 는 초기 수평축 가속도계 바이어스를 나타낸 것이다.

V. 시뮬레이션 결과

추정오차를 분석하기 위해 시뮬레이션을 수행하였다. 저급 관성센서의 출력을 50Hz로 생성하였으며 관성항법시스템의 항법해는 센서의 출력 주기에 맞추어 계산하였다. 관성항법 시스템의 오차는 1Hz로 0속도 측정치를 사용하여 확장칼만 필터에서 추정하였다. 다른 시뮬레이션 파라미터는 다음과 같다.

- 위도: $L = 37^\circ$
- 자세: $\phi = 3^\circ,\ \theta = 5^\circ$
- 가속도계 바이어스:
  $\nabla_x = -10mg,\ \nabla_y = 10mg,\ \nabla_z = 10mg$
- 자이로 바이어스:
  $\varepsilon_x = 0.1\text{deg}/s,\ \varepsilon_y = -0.1\text{deg}/s,\ \varepsilon_z = 0.1\text{deg}/s$
- 공정잡음 공분산:
  $Q = diag\left(\left[(1mg)^2 \quad (1mg)^2 \quad (1mg)^2 \right.\right.$
  $\left.\left. (0.001\text{deg}/s)^2 \quad (0.001\text{deg}/s)^2 \quad 0_{1\times5}\right]\right)$
- 측정잡음 공분산:
  $R = diag\left(\left[(0.001m/s)^2 \quad (0.001m/s)^2 \quad (0.001m/s)^2\right]\right)$
- 시뮬레이션 시간: 60초

초기정렬 시뮬레이션 결과는 그림 2~7에 나타내었다. 이 그림들에서 점선은 10차 모델 필터의 결과이며 실선은 8차 모델 필터의 결과이다. 그리고 일점쇄선은 운항체가 수평상태인 경우 8차 모델 필터의 결과를 나타낸 것이다. 그림 4에서 x와 y축 가속도계 바이어스의 추정은 참값으로 수렴하지 않는 것을 볼 수 있다. 이것은 이 상태변수가 가관측하지 않기 때문이다. 이 영향에 의하여 자세오차가 발생함을 그림 2와 3에서 볼 수 있다. 10차 모델 필터에서 추정된 수평축 가속도계 바이어스의 부호가 참값의 반대이므로 10차 모델 필터에서 자세오차 추정오차는 8차 모델 필터에서 보다 조금 크게 나타난다. 운항체가 수평인 경우에도 자세오차는 가속도계 바이어스에 의하여 발생한다. 이 경우 수직축 가속도계 바이어스는 잘 추정될 수 있음을 그림 5에서 볼 수 있다. 그러나 수평이 아닌 경우 수직축 가속도계 바이어스 추정 오차가 경사각과 수평축 가속도계 바이어스 추정오차에 의하여

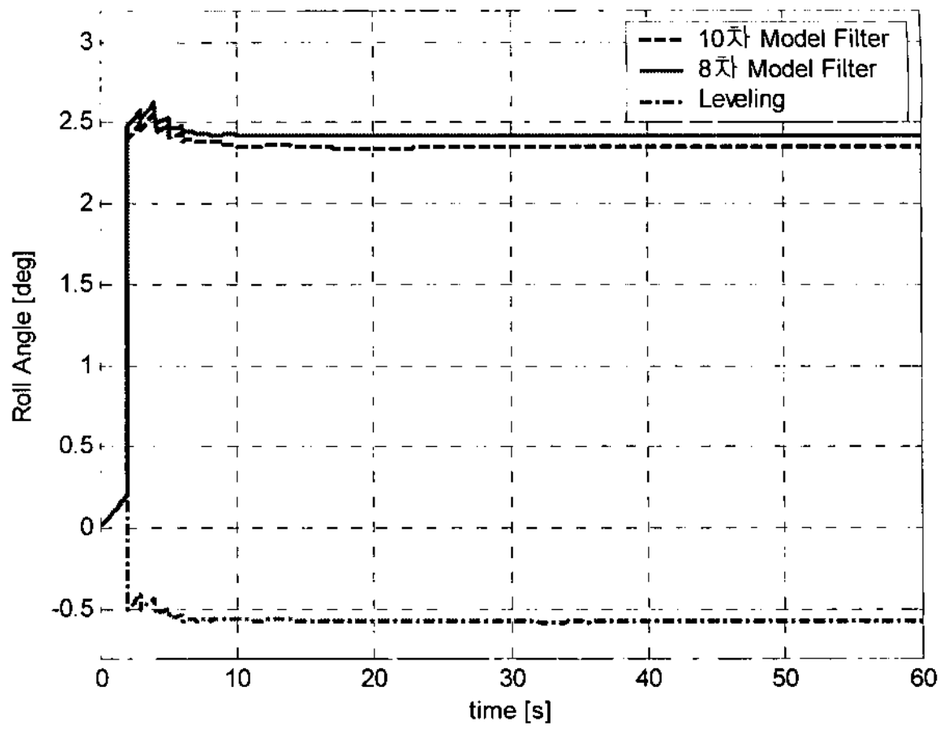

그림 2. 추정된 롤각.
Fig. 2. Estimated roll angle.

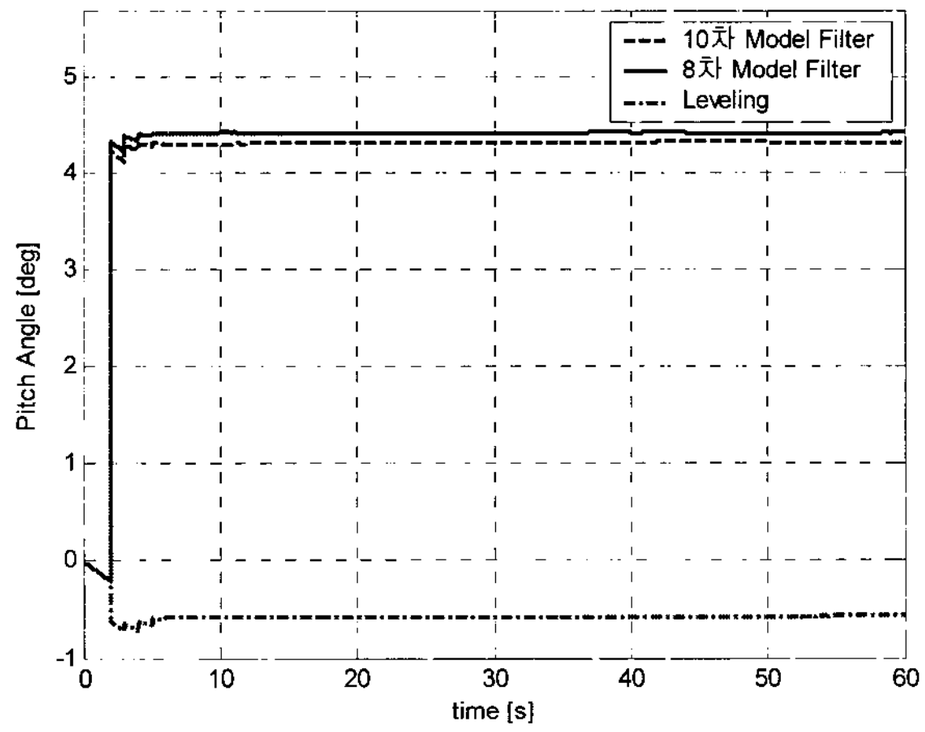

그림 3. 추정된 피치각.
Fig. 3. Estimated pitch angle.

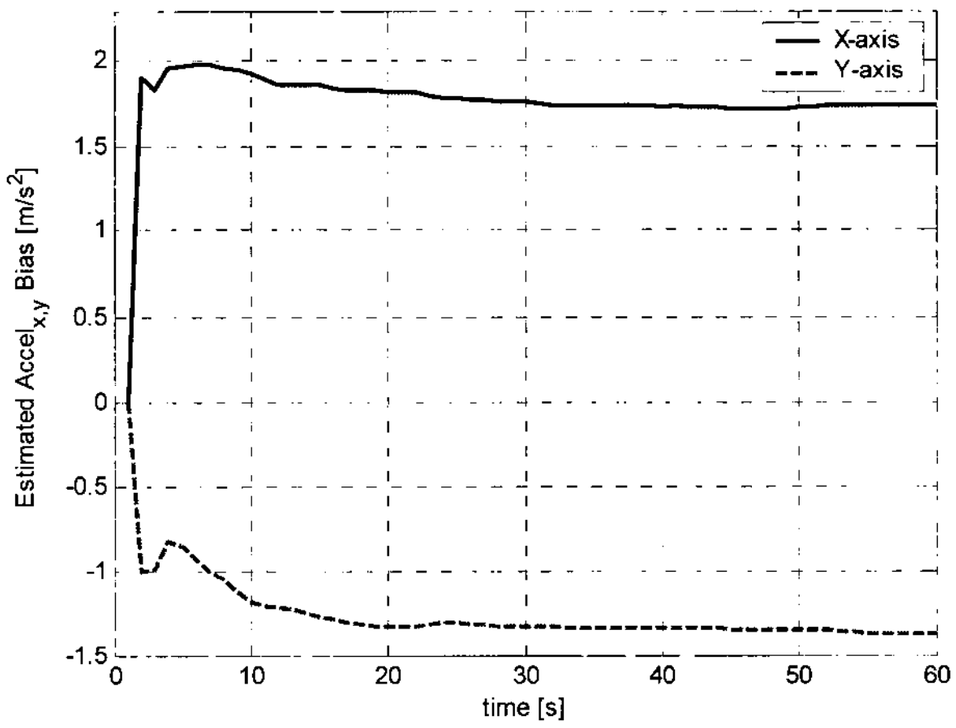

그림 4. 추정된 수평축 가속도계 바이어스.
Fig. 4. Estimated horizontal axis accelerometer biases.

발생하게 된다. 이와 유사한 결과가 자이오 바이어스 추정오차도 발생함을 그림 6, 7을 통해 확인할 수 있다. 자이로 바이어스 추정오차에서 10차 모델 필터와 8차 모델 필터의 결과가 유사하게 나타나는 것은 작은 값의 지구 자전 각속도의

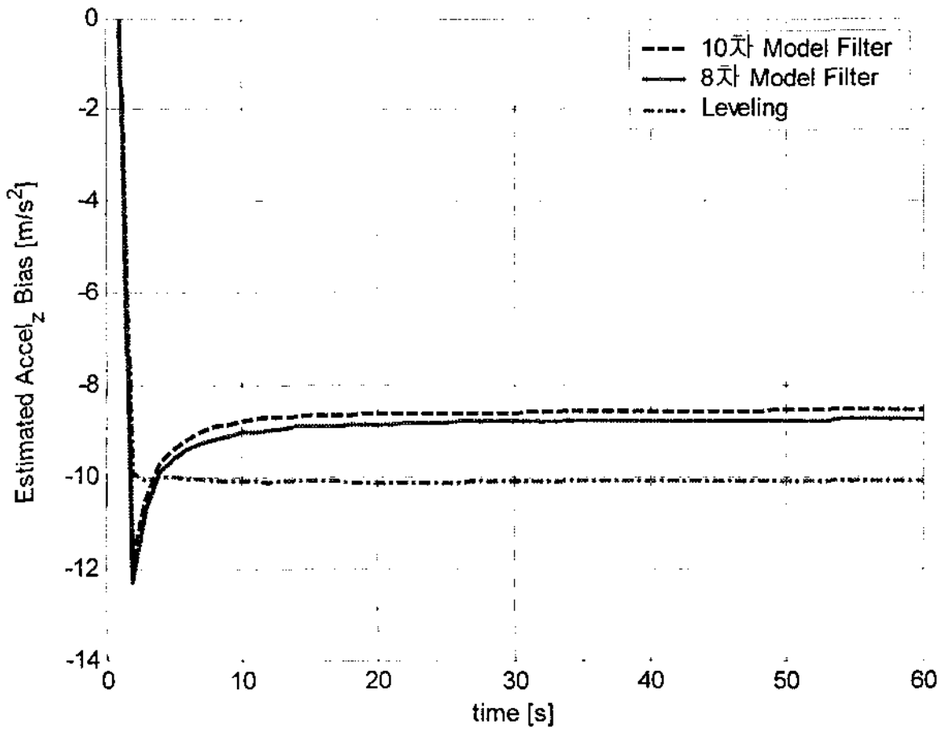

그림 5. 추정된 수직축 가속도계 바이어스.

Fig. 5. Estimated vertical axis accelerometer biases.

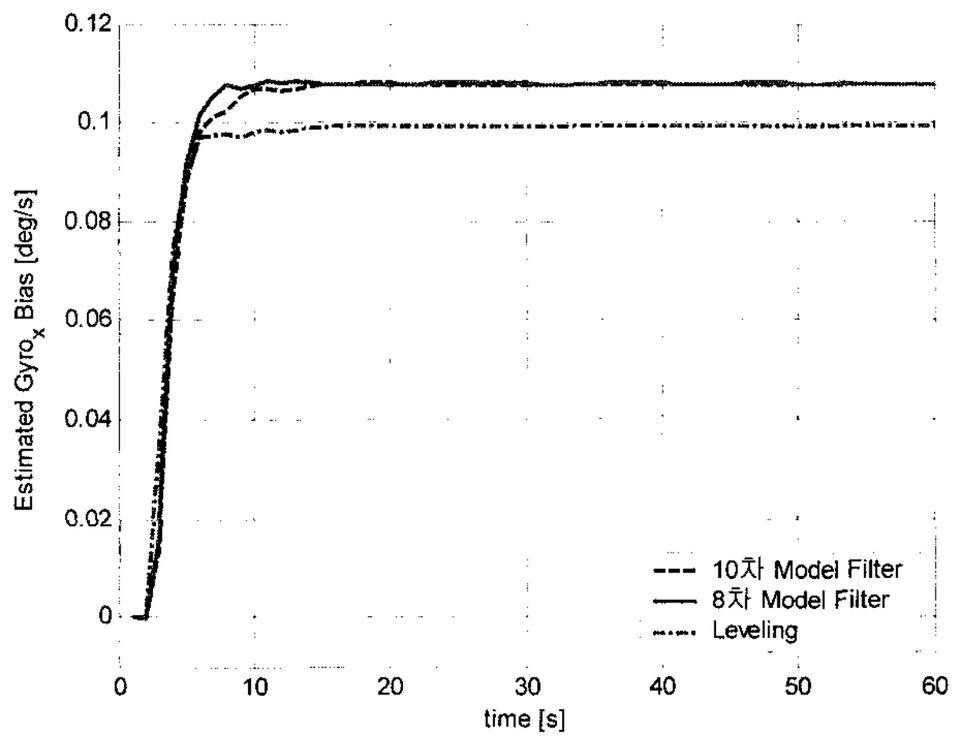

그림 6. 추정된 x축 자이로 바이어스.

Fig. 6. Estimated x axis gyro bias.

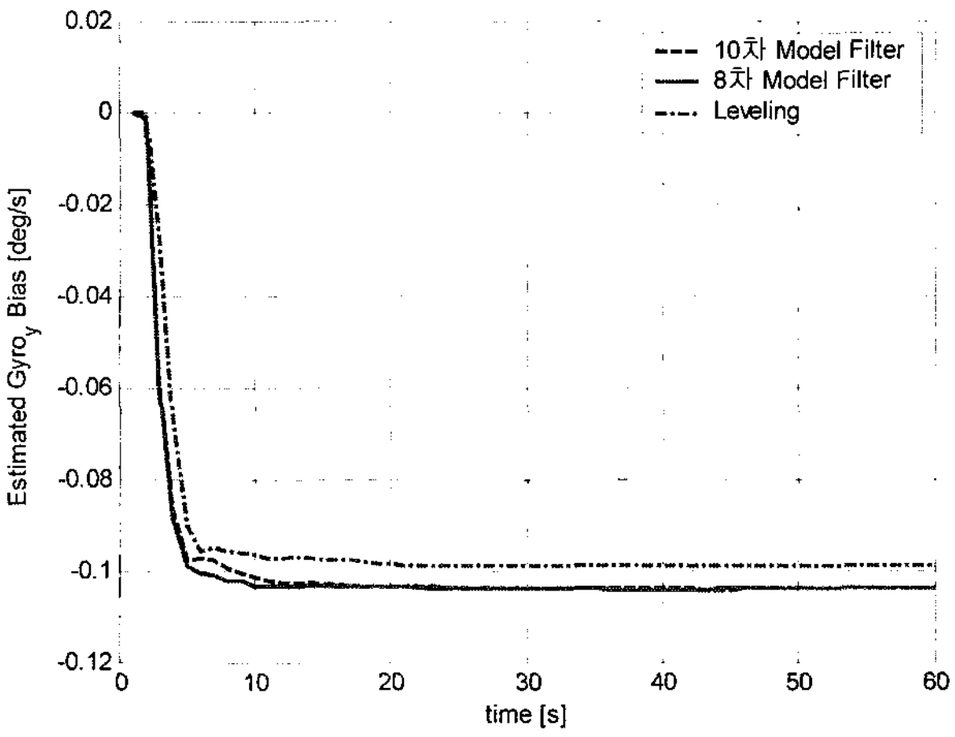

그림 7. 추정된 y축 자이로 바이어스.

Fig. 7. Estimated y axis gyro bias.

수직축 성분이 자이로 바이어스 추정오차에 곱하여지기 때문이다.

결론적으로 수평축 가속도계 바이어스 추정오차와 운항체의 경사각에 의하여 초기정렬 시 상태변수 추정에 오차가 발생함으로 결론을 내릴 수 있다. 그리고 추정 불가능한 수평축 가속도계 바이어스를 상태변수에서 제외한 8차 모델 필터를 사용함으로써 가관측한 상태변수의 추정 오차 증가를 방지할 수 있음을 알 수 있으며, 또한 10차 필터 대신 8차 필터를 사용함으로써 필터 구동에서 계산량도 감소시킬 수 있음을 알 수 있다.

VI. 결론

관성항법시스템 초기정렬 필터의 가관측성과 추정오차를 분석하였다. 방위각과 z축 자이로 바이어스를 제외한 10차 모델 필터에서 가관측 행렬의 계수는 8이 나왔다. 가관측하지 않은 두 개의 상태변수를 찾기 위해 가관측성 정도의 측도인 칼만필터 오차 공분산을 분석하였으며, 그 결과 수평축 가속도계 바이어스가 가관측 하지 않은 것으로 분석되었다. 그리고 다른 8개 상태변수의 추정오차를 가관측 측을 분석하여 유도하였다. 관성항법시스템을 탑재한 운항체가 수평상태를 유지하는 경우, 단지 수평축 자세오차의 추정오차만 가관측하지 않은 상태변수에 의하여 발생하게 된다. 반면, 운항체가 수평을 유지하지 않는 경우, 수직축 가속도계 바이어스와 수평축 자이로 바이어스 추정오차 또한 수평축 가속도계 바이어스 추정오차와 운항체의 경사각에 의하여 발생하는 것을 보였다. 이 결과 기반으로 관성항법시스템의 초기정렬에 적합한 8차 모델 필터를 제안하였다. 이 필터는 가관측하지 않은 수평축 가속도계 바이어스를 상태변수에서 제외한 것이다.

위의 결과는 저가의 관성센서로 구성된 관성항법시스템을 탑재한 운항체가 수평을 이루지 않는 경우 초기정렬의 기본적인 한계를 보여주며, 초기정렬의 성능을 향상시키기 위하여 운항체의 경사각에 의해 발생하는 추정오차를 보상하기 위한 방법이 연구되어야 할 것이다.

참고문헌

[1] S. Y. Cho and W. S. Choi, "Performance enhancement of low-cost land navigation for location based Service," *ETRI Journal*, vol. 28, no. 2, Apr., 2006, pp. 131-144.

[2] K. W. Jolodziej and J. Hjelm, Local Positioning Systems - LBS Applications and Services, CRC Press, 2006.

[3] D. H. Titterton and J. L. Weston, *Strapdown Inertial Navigation Technology*, Peter Peregrinus Ltd., 1997.

[4] J. A. Farrell and M. Barth, *The Global Positioning System & Inertial Navigation*, McGraw-Hill, 1999.

[5] Y. F. Jiang, "Error analysis of analytic coarse alignment methods," *IEEE Trans. Aerospace and Electronic Systems*, vol. 34, no. 1, pp. 334-337, Jan., 1998.

[6] Y. F. Jiang and Y. P. Lin, "Error estimation of INS ground alignment through observability analysis," *IEEE Trans. Aerospace and Electronic Systems*, vol. 28, no. 1, pp. 92-97, Jan., 1992.

[7] I. Y. Bar-Itzhack and N. Berman, "Control theoretic approach to inertial navigation system," *Journal of Guidance and Control*, vol. 11, no. 3, pp. 237-245, 1998.

[8] S. Hong, M. H. Lee, H. H. Chun, S. H. Kwon, and J. L. Speyer, "Observability of error states in GPS/INS integration," *IEEE Trans. Vehicular Technology*, vol. 54, no. 2, pp. 731-743, Mar.,

2005.

[9] J. G. Lee, C. G. park, and H. W. Park, "Multiposition alignment of strapdown inertial navigation system," *IEEE Trans. Aerospace and Electronic Systems*, vol. 29, no. 4, pp. 1323-1328, Oct. 1993.

[10] J. C. Fang and D. J. Wan, "A fast initial alignment method for strapdown inertial navigation system on stationary base," *IEEE Trans. Aerospace and Electronic Systems*, vol. 32, no. 4, pp. 1501-1505, Oct. 1996.

[11] C. Zhang, W. Tian, and Z. Jin, "A novel method improving the alignment accuracy of a strapdown inertial navigation system on a stationary base," *Measurement Science and Technology*, vol. 15, pp. 765-769, 2004.

[12] K. Rief, S, Gunther, E. Yaz, and R. Unbehauen, "Stochastic stability of the discrete-time extended Kalman filter," *IEEE Trans. Automatic Control*, vol. 44, no. 4, pp. 714-728, Apr. 1999.

[13] D. G. Meskin and I. Y. Bar-Itzhack, "Observability analysis of piece-wise constant systems part I: Theory," *IEEE Trans. Aerospace and Electronic Systems*, vol. 28, no. 4, pp. 1056-1067, Oct. 1992.

[14] F. M. Ham and R. G. Brown, "Observability, eigenvalues, and Kalman filtering," *IEEE Trans. Aerospace and Electronic Systems*, vol. 29, no. 4, pp. 269-273, Oct. 1993.

[15] G. M. Siouris, *Aerospace Avionics Systems*, Academic Press, 1993.

[16] H. K. Lee, J. G. Lee, C. G. Park, and Y. K. Rho, "Modeling quaternion errors in SDINS: computer frame approach," *IEEE Trans. Aerospace and Electronic Systems*, vol. 34, no. 1, 1998, pp. 289-299.

조 성 윤

제어 · 자동화 · 시스템공학 논문지 제 12 권 제 2 호 참조.