

고유구조 지정에 의한 슬라이딩 평면 설계와 불확실한 시스템의 슬라이딩 모드 제어

Sliding Surface Design by Eigenstructure Assignment and Sliding Mode Control of Matched Uncertain Systems

이 태 봉*, 양 현 석
(Tae Bong Lee and Hyun Suk Yang)

Abstract: In this paper, a new method to design sliding surfaces using eigenstructure assignment is proposed. Most conventional methods for constructing the surfaces require special form like canonical or regular canonical form of system matrices. But the proposed method can be applied to arbitrary system matrices. Furthermore, the surface matrix, C can be decided for the matrix multiplication, CB to have a designated form. SVD is used to decide desirable eigenvectors explicitly. To verify the proposed algorithm, a sliding mode controller for a multivariable system with matched uncertainty is constructed. The controller is designed to guarantee minimum approach velocity to the sliding surface.

Keywords: sliding mode controller, sliding surface, SVD (Singular Value Decomposition)

I 서론

가변구조 제어 시스템 이론은 외란이나 불확실성을 수반하는 시스템을 안정적으로 제어하는 매우 효과적인 방법으로 알려져 있다[1]. 가변구조 제어는 상태공간 내에 원점을 지나는 평면을 설정하고 이를 기준으로 서로 다른 두 개의 입력을 고속으로 스위칭 하여 이루어진다. ‘가변구조’라는 명칭은 이와 같이 평면을 경계로 인가되는 두 구조의 입력 때문에 붙여진 이름이다. 입력의 스위칭은 상태궤적이 평면에 도달하여 이 후 평면을 따라 움직이도록 하기 위한 것으로 설정된 평면을 따라 움직이는 시스템 운동을 슬라이딩 모드라 한다. 슬라이딩 모드의 운동 특성은 설정된 평면에 의해 결정된다. 따라서 평면을 설계할 때는 제어목적에 맞게 이루어 져야 한다. 슬라이딩 모드는 정합조건을 만족하는 외부 외란이나 내부의 모델 불확실성 등에 영향을 받지 않는 매우 강인한 특성을 갖는다. 결국 가변구조 제어 시스템의 구성 목적은 슬라이딩 모드를 얻기 위한 것이라 할 수 있다.

지금까지 살펴본 바와 같이 슬라이딩 평면의 설정과 슬라이딩 모드를 얻기 위한 스위칭 입력은 가변구조 제어 시스템의 핵심이라 할 수 있다. 그 중 슬라이딩 평면은 가변구조 제어 시스템의 성능을 결정하므로 매우 중요한 요소로 지금까지 슬라이딩 평면 설정 방법에 대한 많은 연구가 있어왔다[2-6]. 가장 일반적인 방법은 시스템을 표준형(canonical form) 또는 정규 표준형(regular canonical form)으로 변환하여 슬라이딩 모드의 고유치나 고유치 벡터를 지정하는 방법이다. 이와 달리 시스템 변환을 필요로 하지 않는 방법으로는 Lyapunov 함수를 이용한 방법[5]과 LMI (Linear Matrix Inequality)를 이용한 방법[6] 등이 있다. 한편

스위칭 평면 설정 시 평면행렬 C 와 시스템 입력행렬 B 의 곱인 CB 의 형태는 다양한 제어 입력의 설계와 매우 밀접한 관계가 있다[7]. 그러나 일반적으로 표준형이나 정규 표준형 시스템의 경우 CB 의 형태를 지정할 수 있으나 그렇지 않은 경우 불가능하거나 매우 어렵다.

본 논문에서는 주어진 시스템을 정규형과 같은 특정한 형태로의 변환 없이 SVD (Singular Value Decomposition)를 이용하여 슬라이딩 모드의 고유치와 고유치 벡터를 지정하여 슬라이딩 평면을 설정하는 새로운 슬라이딩 평면 설계법을 제안하였다. 제시된 방법을 사용하면 행렬 CB 의 형태 또한 임의로 선택 가능하여 제어 입력 설계가 보다 용이해진다. 이를 바탕으로 제안된 알고리즘을 정합조건의 외란을 수반하는 다변수 시스템에 적용하여 평면 밖 상태 궤적이 평면에 도달하는 최소 접근속도를 지정할 수 있는 슬라이딩 모드 제어기를 제안 설계하였다. 제시된 알고리즘의 타당성은 수치 예를 수행하여 그 결과를 제시하였다.

II 시스템과 슬라이딩 모드

다음과 같이 표현되는 시스템에 대해 살펴보도록 하자.

$$\dot{x} = Ax + B(u + \rho(x, t)) \quad (1)$$

식에서 $x \in R^n$ 는 상태벡터, u 는 제어입력이며 $\rho(\cdot) : R^n \times R^+ \rightarrow R^n$ 은 불확실성을 나타내고 $A \in R^{n \times n}$ 는 시스템 행렬, $B \in R^{n \times m}$ 은 $\text{rank}(B) = m$ 인 입력 행렬이다.

주어진 시스템에 대해 아래와 같이 가정 한다.

- A1. (A, B) 는 가제어성을 갖는다.
- A2. 상태벡터 x 는 유용하다.
- A3. $\rho(\cdot)$ 는 각 인자에 대해 연속이다.
- A4. $\|\rho(x, t)\| \leq \hat{\rho}(x, t)$ 인 $\hat{\rho}(x, t) > 0$ 가 존재한다.

주어진 시스템에 대해 슬라이딩 평면을 다음 식과 같이 정의한다.

* 책임저자(Corresponding Author)

논문접수: 2009. 2. 27., 수정: 2009. 4. 20., 채택확정: 2009. 5. 22.

이태봉: 경원대학교 전자정보통신공학부(tblee@kyungwon.ac.kr)

양현석: 홍익대학교 전자전기공학부(hsyang@hongik.ac.kr)

$$S(x) = Cx = 0, C \in R^{m \times n} \quad (2)$$

(2)식에서 C 는 $\det(CB) \neq 0$ 인, $\text{rank}(C) = m$ 의 상수 행렬이다. (2)식을 만족하는 평면상에서 일어나는 $(n-m)$ 차의 시스템 운동을 슬라이딩 모드라 한다. 상태공간내 임의의 위치로부터 평면에 도달한 상태체적이 평면에 머물기 위해서는 (2)식과 더불어 다음 식을 만족해야 한다.

$$\dot{S}(x) = C\dot{x} = 0 \quad (3)$$

슬라이딩 모드의 운동 방정식은 (3)식을 만족하는 등가 제어 입력[7]을 (1)식의 시스템에 인가하여 나타내며 다음 식과 같이 표현된다.

$$\dot{x} = [I_n - B(CB)^{-1}C]Ax = A_{eq}x \quad (4)$$

(4)식에서 보듯이 슬라이딩 모드는 불확실성이 정합조건을 만족하는 경우 불확실성의 영향을 받지 않으며 오로지 평면 행렬 C 에 의해 그 특성이 결정된다. 따라서 C 는 (4)식의 슬라이딩 모드가 바람직한 특성을 갖도록 결정되어야 한다.

III. 슬라이딩 평면 설계

슬라이딩 모드 제어 시스템을 구성하기 위해서는 먼저 슬라이딩 모드의 특성을 결정하는 평면행렬 C 를 설계해야 한다. 본 논문에서는 슬라이딩 모드 고유치 구조 지정법을 제안하고자 한다. 제시된 방법은 원하는 고유치 벡터를 명시적으로 결정할 수 있으며 행렬 CB 의 형태 또한 임의로 정할 수 있다.

(4)식의 양변에 평면 행렬 C 를 곱하면 슬라이딩 모드에서 평면 행렬과 시스템 행렬사이의 x 와 무관하게 다음 식이 성립한다.

$$C[I_n - B(CB)^{-1}C]A = CA_{eq} = 0 \quad (5)$$

따라서 슬라이딩 모드의 고유치 벡터와 평면 행렬 C 는 다음 식을 만족해야 한다.

$$CA_{eq}v_i = \lambda_i Cv_i = 0 \quad (6)$$

(6)식은 $\lambda_i = 0$ 이거나 $v_i \in N(C)$ 를 의미하며 $\text{rank}(C) = m$ 으로부터 A_{eq} 는 m 개의 0과 $n-m$ 개의 $\lambda_i \neq 0$ 고유치를 갖는다는 것을 알 수 있다(이후 0이 아닌 고유치는 서로 다르다고 가정한다). (6)식을 만족하는 $n-m$ 개의 슬라이딩 모드 고유치 벡터와 평면행렬 C 의 관계는 다음식과 같이 하나로 나타낼 수 있다.

$$C[v_1 v_2 \cdots v_{n-m}] \equiv CV = 0, V \in R^{n \times (n-m)} \quad (7)$$

본 논문에서는 지정한 고유치와 그 벡터 V 에 대해 (7)식을 만족할 뿐 만 아니라 행렬 곱 CB 가 임의의 형태를 갖도록 행렬 C 를 결정하고자 한다.

먼저 행렬 CB 의 원하는 형태를 다음 식과 같이 정의하도록 한다.

$$CB = D, D \in R^{m \times m} \quad (8)$$

행렬 D 는 임의의 비특이 행렬이다. (7)식과 (8)식은 다음

식과 같이 하나의 행렬식으로 표현 가능하다.

$$C[V B] \equiv CM = [0 D] \quad (9)$$

한편 (7)식과 $\det(CB) \neq 0$ 로부터

$$R(V) \cap R(B) = \{0\} \quad (10)$$

이 성립한다. 식에서 $R(\cdot)$ 는 range를 나타낸다. (10)식은 (9)식의 행렬 M 이 비특이 행렬임을 나타내므로 평면행렬 C 는 (9)식으로부터 다음 식과 같이 유일하게 결정된다.

$$C = [0 D]M^{-1} = [0 D][V B]^{-1} \quad (11)$$

(11)식에서 행렬 B 와 D 는 이미 알고 있는 값이다. 따라서 평면 행렬 C 가 결정되기 위해서는 고유치 벡터 행렬 V 를 알아야 한다. 이제 이에 대해 살펴보기로 한다.

슬라이딩 모드의 동 특성은 정합조건의 불확실성에 영향을 받지 않으므로 (1)식의 시스템에서 불확실성을 배제한 다음의 공칭 시스템을 고려하도록 하자.

$$\dot{x}_N = Ax_N + Bu_N \quad (12)$$

평면 행렬이 같은 경우 공칭 시스템 (12)식과 (1)식의 슬라이딩 모드는 같다. 이는 (12)식에 등가제어를 적용하여 쉽게 확인 할 수 있다. 따라서 이후 평면 설계에 (1)식의 시스템 대신 (12)식을 사용하기로 한다.

(12)식의 제어입력을 다음식과 같이 정의하고

$$u_N = -Kx_N \quad (13)$$

이를 (12)식에 인가하면 (12)식은 다음 식과 같이 표현된다.

$$\dot{x}_N = Ax_N - BKx_N = (A - BK)x_N \quad (14)$$

(14)식 행렬의 고유치와 고유치 벡터를 다음식과 같이 나타내고

$$(A - BK)w_i = g_i w_i, i = 1, 2, \dots, n-m \text{ and } g_i \neq 0 \quad (15)$$

(15)식의 고유치 벡터로 다음과 같은 행렬을 정의하도록 하자.

$$W = [w_1 | w_2 | \cdots | w_{n-m}] \quad (16)$$

그러면 (16)식에 대해 다음의 정리가 성립한다.

정리 1: 평면 행렬 C 가

$$CW = 0 \quad (17)$$

를 만족하는 경우 $n-m$ 개 g_i 와 w_i 는 슬라이딩 모드에서 고유치 및 고유치 벡터이다.

증명:

(15)식의 양변에 $P = [I_n - B(CB)^{-1}C]$ 를 곱하면 다음 식과 같다.

$$\begin{aligned} & [I_n - B(CB)^{-1}C](A - BK)w_i \\ &= g_i [I_n - B(CB)^{-1}C]w_i, \\ & i = 1, \dots, n-m \end{aligned} \quad (18)$$

(17)식과 $N(P) = R(B)$ 임을 이용하여 (18)식을 정리하면 다음식과 같다.

$$[I_n - B(CB)^{-1}C]Aw_i = A_{eq}w_i = g_iw_i \quad (19)$$

따라서 정리 1이 성립한다. ■

이제 정리 1을 이용하여 (11)식으로부터 평면 행렬 C 를 결정 할 때 필요한 고유치 벡터 V 를 구하기로 한다. (15)식을 정리하면 다음식과 같이 쓸 수 있다.

$$[g_iI_n - A|B] \begin{bmatrix} w_i \\ - \\ Kw_i \end{bmatrix} \equiv A_{g_i} \begin{bmatrix} w_i \\ - \\ Kw_i \end{bmatrix} = 0 \quad (20)$$

(20)식은 정해진 시스템의 주어진 행렬과 원하는 고유치, g_i 및 이에 대응하는 고유치 벡터, w_i 사이에 다음의 관계가 있음을 보여주고 있다.

$$\left(\begin{bmatrix} w_i \\ - \\ Kw_i \end{bmatrix} \in R^{(n+m) \times 1} \right) \in N(A_{g_i} \in R^{n \times (n+m)}) \quad (21)$$

(21)식은 시스템의 가제어성으로부터 $\text{rank}(A_{g_i}) = n$ 이므로 $\dim N(A_{g_i}) = m$ 이 된다. 행렬 A_{g_i} 의 Null 공간 기저 벡터를 구하기 위해 SVD 이론을 적용하면 행렬은 다음 식과 같이 표현 할 수 있다.

$$A_{g_i} = U_i A_i V_i^T, \quad U_i \in R^{n \times n} \quad V_i \in R^{(n+m) \times (n+m)} \quad (22)$$

(22)식에서 행렬 V_i 의 마지막 m 개의 열은 행렬 A_{g_i} 의 Null 공간에 대한 단위 직교 기저벡터로써 다음 식을 만족한다.

$$A_{g_i} V_i = [g_iI_n - A|B] \begin{bmatrix} v_{i(n+1)}^1 & v_{i(n+2)}^1 & \dots & v_{i(n+m)}^1 \\ v_{i(n+1)}^2 & v_{i(n+2)}^2 & \dots & v_{i(n+m)}^2 \end{bmatrix} \quad (23)$$

$$\equiv [g_iI_n - A|B] \begin{bmatrix} V_{i1} \\ V_{i2} \end{bmatrix} = 0$$

(23)식에서 $V_{i1} \in R^{n \times m}$, $V_{i2} \in R^{m \times m}$, $n > m$ 이다. 이제 행렬 V_{i1} 과 평면 행렬 C 의 관계를 살펴보기로 한다. 식 (23)을 풀어서 쓰면 다음 식과 같다.

$$(g_iI_n - A)v_{i(n+j)}^1 + Bv_{i(n+j)}^2 = 0, \quad j = 1, 2, \dots, m \quad (24)$$

(24)식의 양변에 $P = [I_n - B(CB)^{-1}C]$ 를 곱하면 다음과 같다.

$$(I_n - B(CB)^{-1}C)(g_iI_n - A)v_{i(n+j)}^1 + (I_n - B(CB)^{-1}C)Bv_{i(n+j)}^2 = 0 \quad (25)$$

(25)식의 두 번째 항은 0이 되므로 (25)식은 다음 식과 같이 된다.

$$(I_n - B(CB)^{-1}C)Av_{i(n+j)}^1 = g_i(I_n - B(CB)^{-1}C)v_{i(n+j)}^1 \quad (26)$$

(26)식에서 평면 행렬 C 가

$$Cv_{i(n+j)}^1 = 0 \quad (27)$$

를 만족한다면 (26)식은 다음 식과 같이 된다.

$$(I_n - B(CB)^{-1}C)Av_{i(n+j)}^1 = A_{eq}v_{i(n+j)}^1 = g_iv_{i(n+j)}^1 \quad (28)$$

(28)식은 평면 행렬 C 가 (27)식을 만족할 경우 g_i 는 슬라이딩 모드의 고유치가 되고 $v_{i(n+j)}^1$ 는 이에 대응하는 고유치 벡터가 됨을 보여주고 있다. 이러한 사실을 이용하여 $n-m$ 개의 고유치 g_i 와 이에 대응하는 행렬 A_{g_i} 에 SVD를 적용하고 이로부터 구한 Null 공간 단위 직교 기저벡터로부터 다음과 같은 행렬을 구성할 수 있다.

$$V = [v_{1(n+j)}^1 | v_{2(n+j)}^1 | \dots | v_{(n-m)(n+j)}^1] \quad (29)$$

$$V \in R^{n \times (n-m)}, \quad v_{i(n+j)}^1 \in V_{i1}, \quad i = 1, 2, \dots, n-m$$

V 를 구성할 때 $m > 1$ 인 경우 g_i 에 대응하는 벡터를 선택할 때 m 개의 벡터 $v_{ij}^1 (j=1 \sim m)$ 의 어떠한 조합도 가능하며 (27)식의 조건은 다음 식과 같이 표현된다.

$$CV = 0, \quad V \in R^{n \times (n-m)} \quad (30)$$

평면 행렬 C 가 (30)식을 만족하면 정리 1에 따라 행렬 V 의 각 열과 이에 대응하는 g_i 는 각각 슬라이딩 모드의 고유치 벡터와 고유치가 된다. 따라서 (29)식의 V 를 (11)식에 대입하면 원하는 슬라이딩 모드의 고유치 구조와 CB 의 형태를 갖는 평면 행렬 C 를 구할 수 있다.

지금 까지 과정을 단계별로 정리하면 다음과 같다.

1. 주어진 시스템 행렬, A 와 원하는 고유치 g_i 를 선택하여 (20)식의 $A_{g_i} = [g_iI_n - A|B]$ 를 구성한다.
2. A_{g_i} 에 SVD를 적용하여 (22)식의 행렬, $V_i = \begin{bmatrix} V_{i1} \\ V_{i2} \end{bmatrix}$ 를 구한다.
3. $i = 1, 2, \dots, n-m$ 에 대해 단계 1,2를 반복한다.
4. 단계 2의 $V_i (i = 1, 2, \dots, n-m)$ 를 이용하여 (29)식의 행렬 V 를 구성한다.
5. (8)식의 D 를 결정하고, (11)식을 이용하여 평면행렬, C 를 구한다.

IV. 제이기 구성

슬라이딩 모드 제어 시스템의 제어입력은 설정된 평면, $S(x) = 0$ 를 경계로 스위칭이 되는 스위칭 입력의 형태를 갖는다. 이 때문에 슬라이딩 평면을 스위칭 평면이라고도 한다. 슬라이딩 모드를 보장하기 위해 스위칭 입력은 다음 식의 조건을 만족해야 한다.

$$S^T(x) \cdot \dot{S}(x) < 0 \quad (31)$$

(31)식을 만족하는 슬라이딩 모드 제어 시스템의 상태 궤적은 평면에 도달하여 이후 평면에 머물게 된다. 이 때 상태 궤적이 평면에 도달하기 까지 초기구간을 도달구간이라 한다. 도달구간은 슬라이딩 모드와 달리 강인성이 보장되지

않는다. 따라서 슬라이딩 모드 제어 시스템의 제어입력은 슬라이딩 모드 보장과 더불어 가능한 한 도달구간이 짧도록 설계되어야 한다.

(31)식을 만족하는 입력을 정의하는 가장 일반적인 방법 중 하나는 다음 식과 같다.

$$u = u_a + u_d \equiv K_a x + u_d, \quad u_d = \begin{cases} u_d^+, & \text{if } S(x) > 0 \\ u_d^-, & \text{if } S(x) < 0 \end{cases} \quad (32)$$

식에서 u_a 는 연속 입력항이고, u_d 는 평면을 경계로 스위칭이 되는 불연속 입력항이다. 고전적인 슬라이딩 모드 제어에서 u_a 는 다음 식과 같이 공칭 시스템 (12)식의 등가제어 입력으로 정의된다.

$$u_a = u_{eq} = -(CB)^{-1}CAx \quad (33)$$

(33)식을 사용하여 (32)식의 입력을 (1)식의 시스템에 인가하여 이를 (3)식에 대입하면 다음식과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} \dot{S}(x) &= C\dot{x} = C(Ax + Bu_{eq}) + C(Bu_d + B\rho(x,t)) \\ &= C(I_n - B(CB)^{-1}C)Ax + CB(u_d + \rho(x,t)) \\ &= 0 + CB(u_d + \rho(x,t)) \end{aligned} \quad (34)$$

(34)식을 (31)식에 대입하면 (32)식의 입력이 슬라이딩 모드를 보장하기 위해 다음 조건을 만족해야 함을 알 수 있다.

$$\begin{cases} CB(u_d + \rho(x,t)) < 0, S(x) > 0 \\ CB(u_d + \rho(x,t)) > 0, S(x) < 0 \end{cases} \quad (35)$$

(34), (35) 두 식을 통해 연속입력 u_{eq} 는 평면상의 상태궤적이 평면에 머물도록($\dot{S}=0$) 슬라이딩 모드를 보장하며, 불연속 입력 u_d 는 평면을 벗어난 상태궤적이 평면에 도달하도록 불확실성을 보상함을 알 수 있다. 이와 더불어 두 식은 행렬 CB 와 제어 입력이 매우 밀접한 관계가 있음을 보여주고 있다. 결과적으로 (32)식과 같은 제어입력에서는 도달구간을 짧게 하기 위해서는 불연속 입력의 크기를 크게 하여야 한다. 그러나 이것은 입력의 고주파 성분인 채터링을 크게 하는 문제가 있다[9]. 본 논문에서는 이러한 문제를 해결하기 위해 제어입력을 다음 식과 같이 정의 하도록 한다.

$$u = u_r + u_d \equiv Kx - \hat{\rho}(x,t)\text{sgn}(S), \quad \epsilon > 0 \quad (36)$$

본 논문에서는 (36)식의 연속입력, $u_r = Kx$ 가 (32)식과 달리 평면에서 슬라이딩 모드를 보장하며 도달구간에서 평면으로 향하는 최소 접근속도를 보장하도록 결정하고자 한다. 이를 위해 (36)식의 입력을 (1)식의 시스템에 인가하여 (3)식에 대입하면 다음 식과 같다.

$$\dot{S}(x) = C(A+BK)x + CB(-\hat{\rho}(x,t)\text{sgn}(S) + \rho(x,t)) \quad (37)$$

(37)식의 K 는 (33)식과 달리 다음 식을 만족하도록 결정 하도록 한다.

$$C(A+BK) = -\Sigma C, \quad \Sigma = \text{diag}[\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m], \quad \sigma_i > 0 \quad (38)$$

그러면 연속 입력항 K 는 다음 식과 같이 결정된다.

$$K = -(CB)^{-1}CA - (CB)^{-1}\Sigma C \quad (39)$$

(39)식을 (37)식에 대입하면 다음 식과 같다.

$$\dot{S}(x) = -\Sigma S(x) + CB(-\hat{\rho}(x,t)\text{sgn}(S) + \rho(x,t)) \quad (40)$$

한편 본 논문에서 제안한 알고리즘은 행렬 CB 의 선택이 자유로우므로 이를 다음 식과 같이 지정하도록 한다.

$$CB = \Gamma, \quad \Gamma = \text{diag}[\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m], \quad \gamma_i > 0 \quad (41)$$

(41)식을 (40)에 적용하여 이를 (31)식에 대입하면 다음 식과 같다.

$$\begin{aligned} S^T \cdot \dot{S} &= S^T(-\Sigma S + \Gamma(-\hat{\rho}(x,t)\text{sgn}(S) + \rho(x,t))) \\ &= -S^T \Sigma S + S^T(x) \Gamma(-\hat{\rho}(x,t)\text{sgn}(S) + \rho(x,t)) \\ &= -S^T \Sigma S + \sum_{i=1}^m \gamma_i (-\hat{\rho}(x,t)|s_i| + s_i \rho_i(x,t)) < -S^T \Sigma S < 0 \end{aligned} \quad (42)$$

(42)식은 본 논문에서 제시한 제어입력이 슬라이딩 모드를 보장할 뿐만 아니라 평면으로 향하는 상태궤적의 최소 접근속도를 연속입력항 K 의 Σ 를 통해 결정할 수 있음을 보여주고 있다.

V. 수치 예

본 논문에서 제시된 알고리즘의 타당성을 확인하기 위해 다음 식과 같은 값을 갖는 시스템에 대해 고려하도록 한다.

$$A = \begin{bmatrix} -0.0506 & 0 & -1 & 0.238 \\ -0.7374 & -1.3345 & 0.3696 & 0 \\ 1.01 & 0.1074 & -0.332 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (43a)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0.0409 & 0 \\ 1.2714 & -20.3106 \\ -2.0625 & 1.335 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (43b)$$

$$\rho(x,t) = \begin{bmatrix} 0.5\cos(2\pi t) \\ 0.5\sin(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) \end{bmatrix}, \quad \|\rho(x,t)\| \leq \hat{\rho}(x,t) \quad (43c)$$

수치 예에서는 $\hat{\rho}(x,t) = 0.8$ 을 사용하였다. 슬라이딩 모드에서 고유치를 -1과 -2로 설정하고 각각에 대해 (20)식의 A_{g_i} 를 구성해 SVD를 적용하면 (23)식의 V_1 과 V_2 를 다음과 같이 구할 수 있다.

$$V_1 = \begin{bmatrix} V_{11} \\ \vdots \\ V_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.6176 & 0 \\ -0.0810 & 0.6968 \\ -0.5879 & -0.1670 \\ 0.0810 & -0.6968 \\ \hline 0.5093 & 0.0283 \\ 0.0188 & 0.0163 \\ -0.3148 & 0 \\ -0.0745 & -0.8888 \\ -0.6335 & 0.1067 \\ 0.0373 & 0.4444 \\ \hline 0.7004 & -0.0234 \\ 0.0464 & 0.0257 \end{bmatrix}, \quad (44)$$

두 식으로부터 (30)식의 V 는 V_{11} 과 V_{21} 각각 두 열을 합해 한 열씩 다음과 같이 구성하였다.

$$V = \begin{bmatrix} -0.6176 & -0.3146 \\ 0.6158 & -0.9633 \\ -0.7549 & -0.5268 \\ -0.6158 & 0.4816 \end{bmatrix} \quad (45)$$

$D = \Gamma = I_2$ 로 설정하고 (45)식과 함께 (11)식에 대입하면 평면 행렬 C 는 다음 식과 같이 표현 된다.

$$C = [0 \ I_2] [V \ B]^{-1} = [0 \ I_2] \begin{bmatrix} -0.6176 & -0.3146 & 0.0409 & 0 \\ 0.6158 & -0.9633 & 1.2714 & -20.3106 \\ -0.7549 & -0.5268 & -2.0625 & 1.335 \\ -0.6158 & 0.4816 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (46)$$

$$= \begin{bmatrix} 0.7066 & -0.0323 & -0.4907 & -0.1394 \\ 0.0731 & -0.0512 & -0.0301 & -0.0876 \end{bmatrix}$$

이제 마지막으로 행렬 Σ 를 결정하여야 한다. 행렬 Σ 는 상대론적이 평면에 접근하는 최소속도를 결정하는 값이다. $\Sigma=0$ 인 경우 종래의 입력과 같은 (32)의 형태가 된다. 본 논문에서는 두 가지 서로 다른 최소 접근속도와 더불어 종래의 제어입력과 비교를 위해 다음의 세 가지 값을 사용하여 수치 예를 수행하였다.

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \quad (47)$$

다음은 수치 예의 결과에 대한 그림이다. 결과 그림들은 본 논문에서 주장한 바와 같이 대각 행렬 Σ 의 원소들

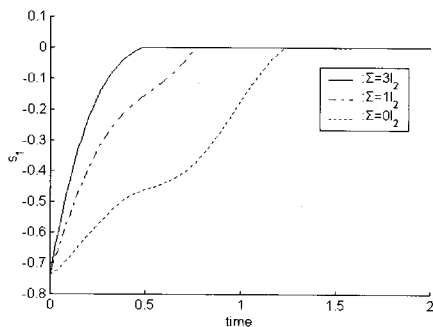


그림 1. 스위칭 평면 $s_1(x)$.
Fig. 1. Switching surface $s_1(x)$.

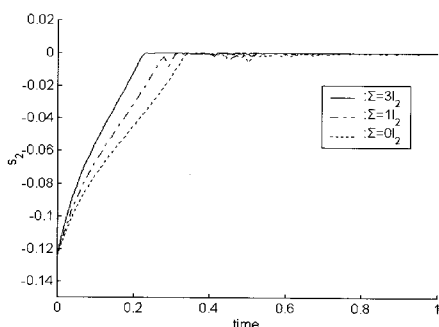


그림 2. 스위칭 평면 $s_2(x)$.
Fig. 2. Switching surface $s_2(x)$.

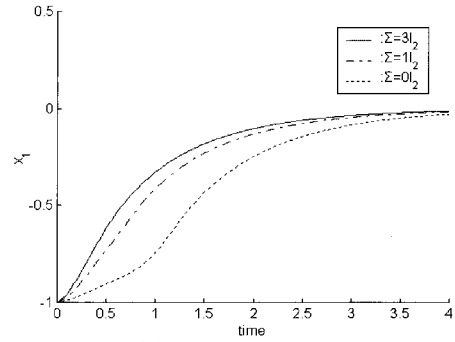


그림 3. 상태변수 $x_1(t)$.
Fig. 3. State variable $x_1(t)$.

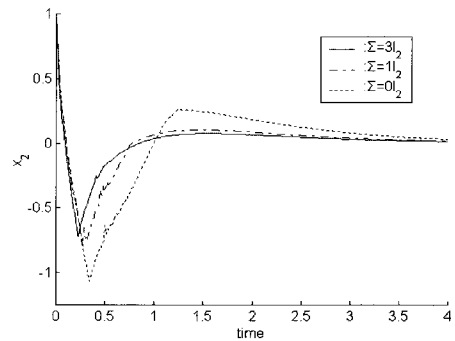


그림 4. 상태변수 $x_2(t)$.
Fig. 4. State variable $x_2(t)$.

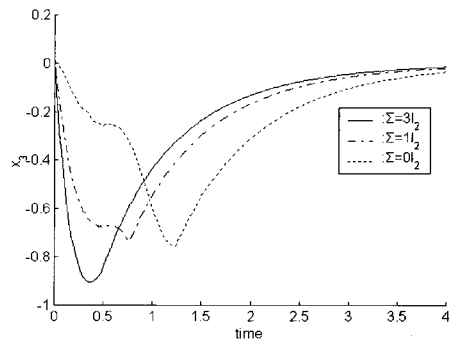


그림 5. 상태변수 $x_3(t)$.
Fig. 5. State variable $x_3(t)$.

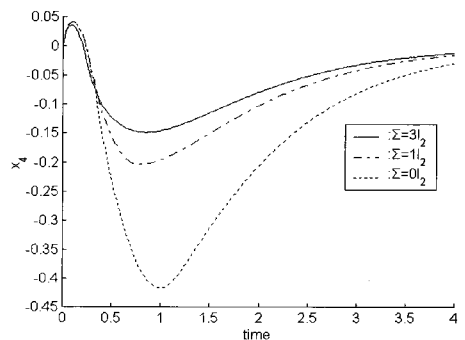


그림 6. 상태변수 $x_4(t)$.
Fig. 6. State variable $x_4(t)$.

이 클수록 평면으로 접근하는 속도가 빠르다는 것을 보여 주고 있다. 특히 종래의 고전적인 방법과 같은 $\Sigma=0$ 인 경우와 그렇지 않은 경우에는 많은 차이를 보여주고 있다.

VI. 결론

슬라이딩 모드 제어 시스템의 슬라이딩 모드는 시스템에 수반하는 정합조건의 불확실성과 무관한 강인한 특성을 갖는다. 슬라이딩 모드를 얻기 위해서는 먼저 슬라이딩 평면을 설정하고 제어입력을 설계한다. 슬라이딩 평면은 슬라이딩 모드의 동특성을 결정하므로 매우 중요한 요소이다.

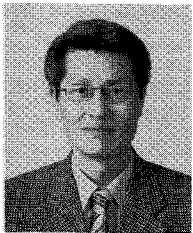
본 논문에서는 슬라이딩 모드의 고유치를 지정할 수 있는 평면 설계법을 제안하였다. 기존의 많은 평면 설계법은 표준형 또는 정규 표준형 이라는 특정한 형태의 시스템을 필요로 하였다. 이와 더불어 고유치 지정 방식을 사용할 경우 고유치 벡터를 명시적으로 결정하기 어려운 단점이 있다. 그러나 본 논문에서 제시한 방법은 시스템 형태의 제한이 없으며 고유치 벡터 또한 SVD를 이용하여 명시적으로 결정할 수 있다. 제시된 방법을 사용하면 입력 설계와 매우 밀접한 연관이 있는 행렬 CB 의 형태 또한 임의로 설정할 수가 있다.

제시된 방법의 타당성은 두 개의 입력을 갖는 다입력 시스템을 대상으로 수치 예를 수행하여 제시하였다.

참고문헌

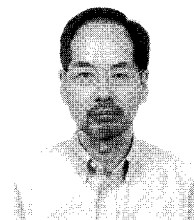
[1] V. I. Utkin, "Variable structure systems with sliding modes," *IEEE Trans. Automatic Control*, vol. AC-22, no. 2, pp. 212-222, Apr. 1977.

- [2] O. M. E. El-Ghezawi, A. S. I. Zinober, and S. A. Billings, "Analysis and design of variable structure systems using geometric approach," *Int. J. Control*, vol. 38, pp. 657-671, 1983.
- [3] C. M. Dorling and A. S. I. Zinober, "Two approaches to hyperplane design in multivariable variable structure systems," *Int. J. Control*, vol. 44, pp. 65-82, 1986.
- [4] J. Ackermann and V. Utkin, "Sliding mode control design based on Ackerman's formula," *IEEE Trans. Automatic Control*, vol. 43, no. 2, pp. 234-237, Feb. 1998.
- [5] W. Su, S. V. Drakunov, and Ü. Özgüner, "Constructing discontinuity surface for variable structure systems: A Lyapunov approach," *Automatica*, vol. 32, pp. 925-928, 1996.
- [6] H. H. Choi, "A new method for variable structure control system design: A linear matrix inequality approach," *Automatica*, vol. 33, pp. 2089-2092, 1997.
- [7] R. A. DeCarlo, S. H. Zak, and G. P. Mathews, "Variable structure control of nonlinear multivariable systems: A tutorial," *Proc. IEEE*, vol. 76, no. 3, pp. 212-232, Mar. 1988.
- [8] T. Kailath, *Linear Systems*, Englewood Cliff, NJ:Prentice-Hall, 1980.
- [9] U. I. Utkin, *Sliding Mode in Control and Optimization*, Springer-Verlag, 1992.



이 태 봉

1986년 홍익대학교 전자공학과 졸업. 1989년 동 대학원 석사. 1994년 동 대학원 박사. 1995년~현재 경원대학교 전자정보통신공학부 교수. 관심분야는 강인제어, 적응제어, 인공지능제어.



양 현 석

1984년 Purdue University 전기과 졸업. 1991년 University of California, Berkeley 공학박사. 1992년~현재 홍익대학교 전자전기공학부 교수. 관심분야는 적응제어, 최적제어.