

중립적으로 안정한 다개체 시스템의 일치에 대한 제어기 차수 감소 패러다임

Order Reduction Paradigm for Consensus of Neutrally Stable Multi-Agent Systems

김 흥 근, 김 성 준, 심 형 보*, 백 주 훈
(Hongkeun Kim, Seongjun Kim, Hyungbo Shim, and Juhoon Back)

Abstract: In this paper we study the consensus problem of SISO (Single-Input Single-Output) linear multi-agent systems under a fixed weighted undirected network communication. The dynamics of each agent can be of any order, while it is constrained to be neutrally stable. Based on a simple root locus argument, we show that the problem at hand is always solvable if the gain and zeros of the dynamic compensator, of which dimension is the same as the number of plant poles on the imaginary axis, are chosen suitably. Finally the result is successfully verified by an example.

Keywords: multi-agent systems, consensus, order reduction, low gain, root locus

I 서론

근래 들어 고전적인 고비용, 대형의 단일 개체 시스템을 제어해 주어진 목적을 달성하는 것보다 저비용, 소형의 다개체 간의 상호 통신 및 협력을 통해 목적 달성하는 것이 큰 화제로 떠오르고 있다. 다개체 간의 상호 협력을 통한 문제 해결을 하기 위해서 대두된 개념이 다개체 시스템의 일치(consensus)이다. 즉, 모든 개체가 상호 통신을 이용해 똑같은 상태로 수렴해 갈 수 있느냐 하는 것이다. 이러한 다개체 시스템의 일치 문제가 제어 학계에서 큰 관심을 받는 이유는 그 문제가 지닌 많은 응용 예 때문이란 것에 의심할 여지가 없다. 가령 무인 항공기의 협조 제어, 이동 로봇의 대형 제어, 센서 네트워크 간의 통신 등이 있겠다. 이 응용분야와 관련된 결과로는 참고문헌[1-7] 등을 들 수 있다. 그러나 많은 결과들이 1차 또는 2차 선형 시스템에 국한되어 있다[1,7].

최근 들어 다개체 시스템의 일치 문제를 일반적인 선형 시스템으로 확장하는 연구들이 수행되었다[2-5]. 참고문헌 [4]에서는 선형 시불변 시스템을 다루고 있으나, 통신 채널을 통해 이웃하는 개체에게 시스템의 상태 변수가 전달되어야 한다. [5]에서는 시스템의 출력을 주고받으나 입력의 개수가 상태 변수의 개수와 같아야 하는 제한조건이 있다. 이와 같은 한계를 극복하는 논문이 참고문헌[2,3]이다. [3]에서는 각 개체들끼리 시스템의 출력만을 주고받고, 시스템 고유치들이 닫힌 좌반 복소평면에 있는 선형 다개체 시스템을 다루고 있다. 하지만 제어기의 차수는 시스템 상태 변수의 차수와 같아야 한다. 반면 [2]에서는 시스템의 고유치

중 한 개 또는 두 개가 원점에 위치하고 나머지는 열린 좌반 복소평면에 있는 경우를 다루고 있다. 이 경우 제어기의 차수를 시스템 상태 변수의 차수보다 작게 만들 수 있다는 것을 보이고 있다.

본 논문은 [2]의 결과를 복소수 고유치를 갖는 중립적으로 안정한 일반적인 선형 다개체 시스템으로 확장하는 문제를 다룬다. 특히 시스템이 허수축에 q 개의 고유치를 가지는 경우 제어기의 차수를 q 까지 줄일 수 있다는 것을 보인다. 본 논문에서는 근궤적 기법(root locus) [9]을 이용하여 이 사실을 증명한다.

본 논문은 다음과 같이 구성되어 있다. II 장에서는 선형 다개체 시스템의 일치 문제와 그에 대한 필요충분조건을 소개한다. III 장에서는 본 논문의 주요 결과인 q 차수 제어기를 소개한다. IV 장에서는 예제를 통해 설계된 제어기의 타당성을 보인다. 마지막으로 V 장에서 본 논문을 마무리한다.

표기법: 본 논문에서는 가중치 양방향 그래프를 $\Omega = (\mathcal{E}, E)$ 과 같이 표기한다. 여기서 $\mathcal{E} = \{1, 2, \dots, N\}$ 는 노드 집합(node set)을, $E \subset \mathcal{E} \times \mathcal{E}$ 는 에지 집합(edge set)을 의미한다. 양방향 그래프에서 에지 (i, j) 는 노드 i 와 노드 j 가 서로 정보를 주고받는다라는 것을 나타낸다. 즉, $(i, j) \in E$ 이면 $(j, i) \in E$ 이고 그 역도 성립한다. 양방향 경로(undirected path)는 $((i_1, i_2), (i_2, i_3), \dots, (i_l, i_{l+1}))$ 과 같이 에지들의 연속으로 정의된다. 단, $j = 1, 2, \dots, l$ 에 대해 $(i_j, i_{j+1}) \in E$ 이고 경로 내의 모든 노드들은 중복되지 않는다. 임의의 두 노드 i 와 j 사이에 양방향 경로가 존재하면 그 그래프는 연결되어 있다(connected)고 한다.

주어진 그래프에 대한 인접 행렬(adjacency matrix) $A = [\alpha_{ij}] \in R^{N \times N}$ 을 정의할 수 있는데, 여기서 α_{ij} 는 $(j, i) \in E$ 인 경우 양수로, $(j, i) \notin E$ 인 경우 0으로 정의한다. 양방향 그래프에서의 인접 행렬은 대칭(symmetric)이고 균형 잡혀 있다(balanced)는 것을 쉽게 알 수 있다. 즉, $A = A^T$ 와

* 책임저자(Corresponding Author)

논문접수: 2009. 11. 10., 수정: 2009. 12. 9., 채택확정: 2009. 12. 15.

김흥근, 김성준, 심형보: ASRI, 서울대학교 전기공학부

(hkkim@cdisl.kr/kaysj27@cdisl.kr/hshim@snu.ac.kr)

백주훈: 광운대학교 로봇학부(backhoon@kw.ac.kr)

※ 이 논문은 2008년도 정부(교육과학기술부)의 재원으로 한국학술진흥재단의 지원을 받아 수행된 연구임(KRF-2008-314-D00160).

$\sum_{j \in \Xi} \alpha_{ij} = \sum_{j \in \Xi} \alpha_{ji}$ 이다. 라플라시안(Laplacian) 행렬 $L = [l_{ij}] \in \mathbb{R}^{N \times N}$ 은 i 번째 대각 성분이 $d_i = \sum_{j \in \Xi} \alpha_{ij}$ 인 대각 행렬 D 에 의해서 $L = D - A$ 와 같이 정의된다. 정의에 의해 L 의 행 합(row sum)이 0이므로, 라플라시안 행렬은 0을 고유치로 가지고 이에 대응되는 고유벡터는 1_N 이다. 여기서 1_N 은 모든 성분이 1인 N 차 열벡터이다. 또한 라플라시안 행렬 L 의 대칭성과 거쉬고린 디스크 정리(Gershgorin disk theorem)에 의해 0이 아닌 다른 모든 고유치들은 양수라는 것을 알 수 있다. 양방향 그래프가 연결되어 있다는 것은 고유치 0의 대수적 다중도(algebraic multiplicity)가 1이 되기 위한 필요충분조건이다[1].

복소수 분석을 편리하게 하기 위해 다음과 같은 몇 가지 표기법을 사용한다. 열린 좌반 복소평면은 C^- 로 표기하고 닫힌 좌반 평면은 \bar{C}^- 로 표기한다. 실수 a 와 b 에 대해 복소수 $\lambda = a + jb$ 의 켈레 복소수는 $\bar{\lambda}$ 로 표기하고 λ 의 편각은 $\text{Arg}(\lambda) := \tan^{-1}(b/a)$ 와 같이 정의한다.

II. 선행 지식

본 논문에서는 다음과 같은 N 개의 동일한 SISO 선행 시불변 플랜트들을 다룬다.

$$\begin{aligned} \dot{x}^i &= Ax^i + Bu^i, & x^i &\in \mathbb{R}^n, \\ y^i &= Cx^i, & u^i, y^i &\in \mathbb{R}, \end{aligned} \quad (1)$$

여기서 $i \in \Xi = \{1, \dots, N\}$ 는 개체 식별 번호를 나타내며, x^i 는 상태변수, u^i 는 제어입력, y^i 는 출력이다. (A, B, C) 는 제어가능하고 관측가능하다. 다개체 시스템 (1)에 대한 통신 토폴로지는 I 장에서 정의한 바와 같이 가중치 양방향 그래프 $\Omega = (\Xi, E)$ 로 표현된다고 가정한다.

각 개체 (1)에 대해, 입력 z^i 에 의해 구동되는 다음과 같은 안정한 동적 제어기를 고려하자.

$$\begin{aligned} \dot{\xi}^i &= F\xi^i + Gz^i, \\ u^i &= H\xi^i + Jz^i, & i &= 1, \dots, N. \end{aligned} \quad (2)$$

이 동적 제어기가 사용할 수 있는 정보는 이웃 개체들과 자신의 출력들이다. 따라서 우리는 동적 제어기가 다음과 같이 출력 정보를 이용한다고 가정한다.

$$z^i(t) = \sum_{j \in \Xi_i} \alpha_{ij}(y^j(t) - y^i(t)) = - \sum_{j \in \Xi} l_{ij}y^j(t). \quad (3)$$

여기서 $\Xi_i = \{j \in \Xi : \alpha_{ij} \neq 0\}$ 는 i 번째 개체의 이웃 개체들의 집합을, α_{ij} 와 l_{ij} 는 각각 주어진 그래프의 인접 행렬과 라플라시안 행렬의 (i, j) 번째 성분을 나타낸다. 인접 행렬의 성분 α_{ij} 는 $j \notin \Xi_i$ 이면 0이므로 i 번째 개체는 그의 이웃의 출력값만 사용한다는 것에 유의하라.

다개체 시스템의 일치에 임의의 초기값을 갖는 플랜트 (1)에 대해, 동적 제어기 (2)를 설계하여 모든 개체의 상태를 점근적으로 일치시키는 문제이다. 다시 말하면 (1)과 (2)로 폐루프 시스템을 구성했을 때 다음을 만족해야 한다.

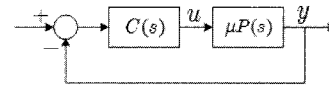


그림 1. 단일 케환 시스템.

Fig. 1. Unity feedback configuration.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (x^i(t) - x^j(t)) = 0, \quad \forall i, j = 1, \dots, N. \quad (4)$$

다개체 시스템의 일치가 이루어지면 식 (3)과 (4)에 의해 $z^i(t)$ 가 0이 되고, 동적 제어기가 안정하므로 입력 $u^i(t)$ 가 0으로 수렴한다는 것을 알 수 있다. 따라서 일치된 신호 $\zeta(t)$ 는 동역학 $\dot{\zeta}(t) = A\zeta(t)$ 를 만족해야만 한다.

다개체 시스템의 일치 문제를 풀기 위해, 주어진 그래프가 다음과 같은 통상적인 가정을 만족한다고 가정한다.

가정 1: 가중치 양방향 그래프 Ω 는 연결되어 있다.

주목 1: 앞에서 언급했듯이, 임의의 두 노드 사이에 양방향 경로가 존재하면 그래프가 연결되어 있다고 한다. 이러한 가정의 필요성은 물리적으로도 쉽게 알 수 있다. 예를 들어, 다개체 시스템에서 어떤 한 개체가 다른 모든 개체와 통신 링크로 연결되어 있지 않다고 한다면 (다른 개체와 정보를 주고 받지 않는다는 것을 의미한다), 그 개체는 절대로 다른 개체들과 일치를 이룰 수 없다는 것을 쉽게 알 수 있다.

가정 1에 의해 라플라시안 행렬 L 의 고유치 0에 대한 대수적 다중도는 1이 된다. 일반성을 잃지 않고 라플라시안 행렬 L 의 첫 번째 고유치 μ_1 이 0이라고 가정하자. I 장에서 언급했듯이, 라플라시안 행렬의 다른 모든 고유치들은 양수이다. 즉, 모든 $i = 2, \dots, N$ 에 대해 $\mu_i > 0$ 이다.

플랜트 (1)과 동적 제어기 (2)의 전달함수를 각각

$$P(s) = \frac{N_P(s)}{D_P(s)}, \quad C(s) = \frac{N_C(s)}{D_C(s)}$$

라고 했을 때, 다개체 시스템의 일치 문제에 대해 다음과 같은 결과가 널리 알려져 있다.

정리 1 [2,3,6]: 가정 1이 성립하면, 다개체 시스템의 일치 문제가 풀리는 것과 제어기의 특성방정식 $D_C(s)$ 가 Hurwitz이고, 모든 $\mu_i \neq 0$ 에 대해 다항식 $T_d(s) = D_P(s)D_C(s) + \mu_i N_P(s)N_C(s)$ 이 Hurwitz라는 것은 동치이다.

주목 2: 다항식 $T_d(s)$ 가 Hurwitz라는 것은 $T_d(s) = 0$ 을 만족하는 모든 해 s 의 실수부가 음수라는 것을 의미한다. 이는 전달함수 $1 + \mu_i P(s)C(s)$ 의 영점들이 모두 C^- 에 있다는 것과 동일하다. 즉, 모든 $\mu_i \neq 0$ 에 대해 플랜트 $\mu_i P(s)$ 를 안정한 제어기 $C(s)$ 로 동시에 안정화시키는 문제이다. 이는 그림 1과 같이 단일 케환(unity feedback) 시스템으로 나타낼 수 있다.

III. 주요 결과

이 장에서는 정리 1에 기반하여, 중립적으로 안정한(neutrally stable) 다개체 시스템에 대한 일치 문제를 푸는

동적 제어기 (2)를 제시한다.

가정 2: 시스템 행렬 A 는 중립적으로 안정하다. 즉, A 의 모든 고유치는 닫힌 좌반 평면 C^- 에 있으며, 허수축에 있는 q 개의 고유치는 모두 단일하다(simple).

다음은 본 논문의 주요 결과이다. 동적 제어기의 차수가 q 라는 것에 주의하라.

정리 2: 가정 1과 2가 성립하면, 다개체 시스템 (1)을 일치시키는 식 (5)로 표현되는 q 차의 안정한 선형 동적 제어기가 존재한다.

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{q-1} \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (5)$$

$$H = [b_0 \ b_1 \ \cdots \ b_{q-2} \ b_{q-1}], \quad J = K.$$

여기서 실수 b_0, b_1, \dots, b_{q-1} 과 K 는 설계 변수이고, a_0, \dots, a_{q-1} 은 임의의 Hurwitz 다항식 $D_C(s) = s^q + a_{q-1}s^{q-1} + \dots + a_1s + a_0$ 의 계수들이다.

증명: 위 정리는 간단한 근궤적 기법을 이용하여 증명 가능하다[9], [Lemma 4.3, 8]. 먼저 모든 $i = 2, \dots, N$ 에 대해 $\mu_i \in M$ 을 만족하는 옹골 집합(compact set) M 을 다음과 같이 정의한다: $M = [\mu_{\min}, \mu_{\max}]$, $\mu_{\min} > 0$. 정리 1로부터 우리는 모든 $\mu \in M$ 에 대해 다항식 $T_\alpha(s) = D_P(s)D_C(s) + \mu N_P(s)N_C(s)$ 가 Hurwitz이면 다개체 시스템의 일치 문제가 풀리는 것을 알 수 있다.

가정 2에 의해서 다항식 $D_P(s)$ 는 $D_P(s) = D_P^-(s)D_P^0(s)$ 와 같이 나타낼 수 있다. 여기서 $D_P^-(s)$ 는 모든 근이 C^- 에 존재하는 $n - q$ 차 다항식이고, $D_P^0(s) = s^m \prod_{r=1}^{q-m} (s - \lambda_r)$ 는 모든 근이 허수축에 있는 q 차 다항식이다. 여기서 m 은 복소평면의 원점에 극점이 있는지, 없는지에 따라 1 또는 0으로 각각 정해진다. 제어기 전달함수의 분모 $D_C(s)$ 는 정리 2에서와 같이 임의의 q 차 Hurwitz 다항식으로 설계하고, 분자는 $N_C(s) = K\bar{N}_C(s) := K \prod_{r=1}^{q-m} (s - \sigma_r)$ 로 놓는다. 여기서 제어기의 영점 σ_r 과 실수 K 는 추후에 설계할 것이다. 이러한 정의와 그림 1에 의해, 개루프 전달함수 $T_{op}(s)$ 와 그에 해당하는 단일 궤환 폐루프 특성방정식 $T_d(s)$ 를 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$T_{op}(s) = \frac{\mu KN_P(s)\bar{N}_C(s)}{D_P^-(s)D_P^0(s)D_C(s)},$$

$$T_d(s) = D_P^-(s)D_P^0(s)D_C(s) + \mu KN_P(s)\bar{N}_C(s).$$

나머지 증명은 다음의 4 단계를 따른다.

단계 1: 특성 방정식 $T_d(s)$ 는 $K=0$ 일 때 q 개의 근을 허수축에, n 개의 근을 C^- 에 갖는다. C^- 에 있는 n 개의 근은 근궤적의 연속성에 의하여 모든 $\mu \in M$ 에 대하여 $|K|$ 의 값이 충분히 작으면 여전히 좌반 복소평면에 남아 있는

다. 이러한 작은 K 에 대해 허수축에 있는 q 개의 근이 어디로 이동하는지를 단계 2와 3에서 조사한다.

단계 2: 허수축에 있는 극점들이 어느 방향으로 이동하는지는 근궤적의 출발각(angle of departure)에 의해 결정된다. 이 단계에서는 $m=1$ 일 경우, 복소평면의 원점에서 출발하는 근궤적이 어디로 이동하는지를 살펴본다. 만약 $m=0$ 이면 바로 단계 3)에서 시작하면 된다.

먼저 제어기의 영점($N_C(s)$ 의 근)이 복소평면의 실수축에 있지 않다고 가정하자. 그러면 원점에서 출발하는 근궤적의 출발각 ϕ_0 는

$$\phi_0 = \text{Arg}(KN_P(0)) - \pi$$

이다. 위의 식은 실계수 선형 시스템의 허근들은 복소평면에서 켈레로 나타나고, μ 는 항상 양수라는 사실로부터 이끌어 낼 수 있다. 따라서 $KN_P(0) > 0$ 가 되도록 K 의 부호를 정하면 원점에서 출발하는 근궤적은 항상 C^- 로 이동한다.

단계 3: 이 단계에서는 허수축에 있는 나머지 극점들의 출발각을 알아본다. $v=1, \dots, q-m$ 에 대해 극점 λ_v 에서 출발하는 근궤적의 출발각 ϕ_v 는

$$\phi_v = \text{Arg}\left(\frac{\mu KN_P(\lambda_v)}{D_P^-(\lambda_v)D_C(\lambda_v)}\right) + \sum_{r=1}^{q-m} \text{Arg}(\lambda_v - \sigma_r) - m\text{Arg}(\lambda_v) - \sum_{r=1}^{q-m} \text{Arg}(\lambda_v - \lambda_r) - \pi.$$

이다. 여기서 제어기의 r 번째 영점을 $\sigma_r = \lambda_r - \epsilon e^{j\theta_r}$ 과 같이 설계하자. θ_r 과 양수 ϵ 은 추후에 정할 것이다. 따라서 λ_v 에서의 출발각은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \phi_v(\epsilon, \theta) &= \text{Arg}\left(\frac{KN_P(\lambda_v)}{D_P^-(\lambda_v)D_C(\lambda_v)}\right) + \sum_{r=1}^{q-m} \text{Arg}(\lambda_v - \lambda_r + \epsilon e^{j\theta_r}) - m\text{Arg}(\lambda_v) - \sum_{r=1}^{q-m} \text{Arg}(\lambda_v - \lambda_r) - \pi \\ &= \theta_v + \text{Arg}\left(\frac{KN_P(\lambda_v)}{D_P^-(\lambda_v)D_C(\lambda_v)}\right) + \sum_{\substack{r=1 \\ r \neq v}}^{q-m} \text{Arg}\left(\frac{\lambda_v - \lambda_r + \epsilon e^{j\theta_r}}{\lambda_v - \lambda_r}\right) - m\text{Arg}(\lambda_v) - \pi \end{aligned}$$

여기서 $\theta = \text{col}(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{q-m})$ 이고, 모든 $\mu \in M$ 에 대해 $\mu > 0$ 이란 사실을 이용했다.

다음으로 출발각이 $\pi/2 < \phi_v(\epsilon, \theta) < 3\pi/2$ 가 되도록 ϵ 과 θ 를 설계한다. 이를 위해 $\epsilon_0 := 0$ 와

$$\theta_{v0} := \delta_v - \text{Arg}\left(\frac{KN_P(\lambda_v)}{D_P^-(\lambda_v)D_C(\lambda_v)}\right) + m\text{Arg}(\lambda_v) + \pi$$

를 정의한다. 여기서 모든 v 에 대해 $\pi/2 < \delta_v < 3\pi/2$ 를 만족하게 δ_v 를 정한다. 만약 $c, d = 1, \dots, q-m$ 과 $c \neq d$ 에 대해, λ_c 와 λ_d 가 켈레 복소수 관계이면 $\delta_c = -\delta_d$ 가 성립하도록 δ_c 와 δ_d 를 잡는다. 또한 ϵ 과 θ 에 의존하는 함수 $f(\epsilon, \theta)$ 를 다음으로 정의한다.

$$f(\epsilon, \theta) := \begin{bmatrix} \phi_1(\epsilon, \theta) - \delta_1 \\ \vdots \\ \phi_{q-m}(\epsilon, \theta) - \delta_{q-m} \end{bmatrix}. \quad (6)$$

그러면 $f(\epsilon_0, \theta_0) = 0$ 과 $\partial f / \partial \theta(\epsilon_0, \theta_0) = I_{q-m}$ 이 성립한다. 따라서 음함수 정리(implicit function theorem)에 의해, 연속적으로 미분 가능한(continuously differentiable) 함수 $g(\cdot)$ 와 θ_0 의 이웃 집합(neighborhood) Θ 가 존재해, 충분히 작은 ϵ 과 모든 $\theta \in \Theta$ 에 대해 $f(\epsilon, g(\epsilon)) = 0$, $\theta = g(\epsilon)$, 그리고 $\theta_0 = g(\epsilon_0)$ 가 보장된다는 것을 알 수 있다. 즉, 충분히 작은 $\epsilon > 0$ 과 모든 $v = 1, \dots, q-m$ 에 대하여, 출발각이 $\pi/2 < \phi_v(\epsilon, g(\epsilon)) = \delta_v < 3\pi/2$ 가 된다. 게다가 ϵ 이 작으면 $N_C(s)$ 의 근들이 실수축에 놓이지 않는다. 왜냐하면 제어기의 영점 σ_v 는 그 정의로부터 허수축에 있는 플랜트의 극점 λ_v 에서 ϵ 거리에 있기 때문이다. 따라서 단계 2에서 한 가정을 만족하면서 음함수 $f(\epsilon, \theta) = 0$ 의 해가 항상 존재하도록 ϵ 을 정할 수 있다. 그러므로 근계적 기법으로부터 응용 집합 M 의 모든 원소 μ 에 대하여, $|K|$ 의 값이 충분히 작으면 허수축에 있는 모든 폐루프 극점들이 좌반 복소평면 C^- 로 이동한다는 것을 알 수 있다.

단계 4: 단계 3까지의 결과로부터 설계된 제어기 $C(s)$ 는 다음과 같은 형태가 된다.

$$\begin{aligned} C(s) &= \frac{N_C(s)}{D_C(s)} = \frac{K(s - \sigma_1) \cdots (s - \sigma_{q-m})}{s^q + a_{q-1}s^{q-1} + \cdots + a_0} \\ &= \frac{b_{q-1}s^{q-1} + \cdots + b_1s + b_0}{s^q + \cdots + a_1s + a_0} + K(1 - m). \end{aligned}$$

이 제어기를 구현(realization)하면 (5)에 있는 행렬들을 얻을 수 있다. $J = K(1 - m)$ 인 것에 주의하라. ■

IV. 예제

다음과 같은 전달함수를 가지는 동일한 3개의 6차 시스템 (1)을 고려하자.

$$P(s) = \frac{(s+2-2j)(s+2+2j)}{s(s+j)(s-j)(s+5)(s+3+j)(s+3-j)}.$$

이 다개체 시스템에 대한 통신 토폴로지는 라플라시안 행렬 L 에 의해 다음과 같이 주어진다 하고 하자.

$$L = \begin{bmatrix} 1.5 & -0.5 & -1 \\ -0.5 & 0.5 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

개체들 간의 통신에 가중치가 있는 것을 참고하라.

허수축에 시스템의 극점이 3개 있으므로 다음과 같은 안정한 제어기를 고려한다.

$$C(s) = \frac{K(s - \sigma_1)(s - \sigma_2)}{(s+1)(s+2+j)(s+2-j)}.$$

위 제어기의 영점을 설계하기 위해서는 $f(\epsilon, \theta) = 0$ 을 만족하도록 ϵ 과 θ 를 구하여야 한다(식(6) 참조). 일반적으로 닫힌 형태의 해(closed-form solution)를 구하는 것은 어려운 문제이나, 수치적 접근법을 이용(가령 Matlab의 fsolve 명령)하

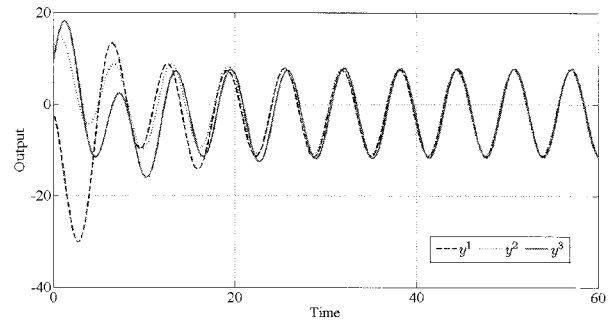


그림 2. 시뮬레이션 결과.

Fig. 2. Simulation result.

면 쉽게 구할 수 있다. 즉, $\epsilon = 0.5$, $\delta_1 = \pi$, $\delta_2 = -\pi$ 로 선정하여 영점 $\sigma_1 = 0.4999 + j1.0113$, $\sigma_2 = 0.4999 - j1.0113$ 을 구하였다.

개체들의 초기값은 $[-2, 2]$ 에 속하는 임의의 값으로, 제어기의 초기값은 모두 0으로 두었다. 마지막으로, 제어기 이득 K 는 3으로 선정하였다. 그림 2는 설계된 제어기로 전체 시스템의 거동을 모의시험한 결과이다. 편의상 각 시스템의 출력만 표시하였다. 그림에서 보듯이, 각 개체들의 출력이 상수가 더해진 사인파 형태로 잘 수렴해 가는 것을 알 수 있다.

V. 결론

본 논문에서는 일반적인 중립적으로 안정한 선형 다개체 시스템의 일치 문제를 다루었다. 특히 시스템 행렬의 고유치 중 q 개가 허수축 위에 있을 때 제어기의 차수를 q 까지 줄일 수 있다는 것을 보였다. 이는 허수축에 있는 시스템 행렬의 고유치와 매우 가깝게 제어기의 영점을 추가하여, 허수축 극점에서 출발하는 근계적 출발각이 열린 좌반 평면으로 향하도록 하여 가능하였다.

이 결과를 바탕으로 허수축에 중첩된 고유치(repeated eigenvalues)가 있는 더 일반적인 시스템을 일치시키는 저차의 제어기를 설계하는 문제를 다룰 수도 있을 것이다. 또한 실질적인 응용으로서, 본 제어 알고리즘을 여러 대의 청소 로봇에 적용해 보는 것은 유익할 것이다. 왜냐하면 여러 대의 청소 로봇이 바닥을 청소할 때에는 서로의 위치가 동기되어 지그재그(또는 사인파형)로 움직여야 바닥을 효율적으로 청소할 수 있기 때문이다. 게다가 저차의 제어기를 사용하므로 저비용 로봇을 구현할 수 있다.

참고문헌

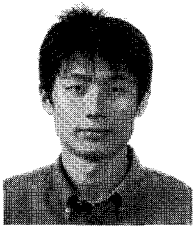
- [1] W. Ren, R. W. Beard, and E. B. Atkins, "Information consensus in multivehicle cooperative control: collective group behavior through local interaction," *IEEE Control Systems Magazine*, vol. 27, pp. 71-82, 2007.
- [2] J. H. Seo, H. Shim, and J. Back, "Consensus and synchronization of linear high-order systems via output coupling," *Proc. of European Control Conference*, pp. 767-772, Aug. 2009.
- [3] J. H. Seo, H. Shim, and J. Back, "High-order consensus

of MIMO linear dynamic systems via stable compensator," *Proc. of European Control Conference*, pp. 773-778, Aug. 2009.

- [4] P. Wieland, J.-S. Kim, H. Scheu, and F. Allgower, "On consensus in multi-agent systems with linear high-order agents," *Proc. of the 17th IFAC World Congress*, pp. 1541-1546, 2008.
- [5] S. E. Tuna, "Synchronizing linear systems via partial-state coupling," *Automatica*, vol. 44, no. 8, pp. 2179-2184, 2008.
- [6] J. A. Fax and R. M. Murray, "Information flow and cooperative control of vehicle formations," *IEEE*

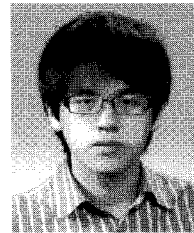
Transactions on Automatic Control, vol. 49, no. 9, pp. 1465-1476, 2004.

- [7] W. Ren, "On consensus algorithms for double-integrator dynamics," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 53, no. 6, pp. 1503-1509, 2008.
- [8] C. I. Byrnes, F. D. Priscoli, and A. Isidori, *Output Regulation of Uncertain Nonlinear Systems*, Birkhäuser, 1997.
- [9] G. F. Franklin, J. D. Powell, and A. Emami-Naeini, *Feedback Control of Dynamic Systems*, Prentice Hall, 2006.



김 홍 군

2005년 한양대 전기전자컴퓨터공학부 졸업. 2005년~현재 서울대학교 전기공학부 석·박사통합과정. 관심분야는 출력제어, 다개체 시스템.



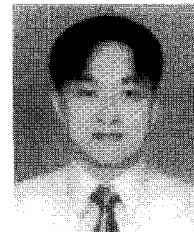
김 성 준

2009년 서울대 전기공학부 졸업. 2009년~현재 서울대학교 전기공학부 석사과정. 관심분야는 다개체 시스템.



심 형 보

1993년 서울대 전기공학과 졸업. 1995년 동 대학원 석사. 2000년 동 대학 박사. 2003년~현재 서울대학교 전기공학부 교수. 관심분야는 다개체 시스템, 바이오 시스템, 하이브리드 시스템.



백 주 훈

1997년 서울대 기계설계학과(공학사). 1999년 서울대학교 기계설계학과(공학 석사). 2004년 서울대학교 전기공학부(공학박사). 2007년~2008년 고려대학교 기계공학부 연구교수. 2008년~현재 광운대학교 로봇학부 조교수. 관심분야는 비선형 제어, 다개체 시스템, 풍력 발전 제어시스템.