DC 모터 시스템을 위한 짧은 샘플링 시간을 갖는 이산슬라이딩 모드의 최종 수렴범위

The Ultimate Bound of Discrete Sliding Mode Control System with Short Sampling Period for DC Motor System

박 흠 용, 조 영 훈, 박 강 박*
(Heum-Yong Park, Young-Hun Jo, and Kang-Bak Park)

Abstract: Almost all of control schemes proposed so far have been designed in the continuous-time domain theoretically. Actual systems, however, have been implemented in the discrete-time domain since Micro Control Unit(MCU) and/or microprocessors have been used for the controllers. Thus, the overall system turned to be a sampled-data system, and generally speaking, the ultimate error cannot converge to zero in the actual system even though the proposed control algorithm showed the asymptotic stability in the continuous-time domain. In this paper, therefore, the ultimate error bound of a sampled data system with a short sampling period has been investigated. The ultimate error is shown to be related in the sampling period.

Keywords: SMC (Sliding Mode Control), ultimate bound, sampled-data system

I. 서론

슬라이딩 모드 제어(sliding mode control) 기법은 외란 및 모델의 불확실성에 대해서 불변(invariance)하고 견실(robustness)한 성질을 갖는 장점이 있다. 이러한 장점들은 상태 공간에 설정한 스위칭 평면(hyperplane)의 양측에서 스위칭 조작 입력을 사용하여 대상 시스템의 상태 궤적을 스위칭 평면에 구속시키고 슬라이딩 모드를 발생시킴으로써 시스템 상태를 평형점으로 움직여 안정화하는 제어 방법으로 기존의 슬라이딩 모드 제어에 대한 연구는 주로 연속 시간영역에서 이루어져 왔다[1-4].

그러나 대부분의 실제 제어기들은 연속시간 영역에서 구현하지 않고, 마이크로 프로세서 또는 컴퓨터를 이용하여 이산시간 영역에서 구현되고 있다. 따라서 이론이 도출된 영역과 실제 구현하는 영역간에 괴리가 생기게 된다. 뿐만 아니라 연속시간에서 안정한 제어기를 설계했다 할지라도 이를 이산시간에서 구현하면 전체 시스템이 불안정해질 수도 있음이 이미 잘 알려져 있으며, 여기에는 샘플링 주기가 영향을 미친다.

최근에 연속시간에서 안정하게 설계된 슬라이딩 모드 제어기를 이산 시간 영역에서 구현할 때의 수렴 범위에 대한 연구가 활발히 진행되고 있다[5-7]. 그러나 Yu 등이 제안한 방법은 샘플링 주기가 짧은 경우에는 적용할 수 없는 한계가 있는 등 여러 제약 조건이 있었다.

이에 본 논문에서는 DC 모터 시스템에 대해서 연속시간에서 안정하게 설계된 슬라이딩 모드 제어기를 짧은 샘플링 주기를 갖는 이산 시간 시스템으로 구현할 때 나타나게 되는 정상상태에서의 오차의 최대 수렴 범위를 도출하였으며, 실험을 통해 타당성을 입증하였다.

* 책임저자(Corresponding Author)
논문접수: 2009. 10. 29., 수정: 2009. 11. 19., 채택확정: 2009. 12. 18.
박흠용, 조영훈, 박강박: 고려대학교 제어계측공학과
(pajoy@korea.ac.kr/jo-young-hun@hanmail.net/kbpark@korea.ac.kr)
※ 본 논문은 고려대학교 특별연구비에서 지원하여 연구하였음.
※ 상기 논문은 KACC2009 학술대회에서 초안이 발표되었습니다.

II. 이산 슬라이딩 모드 제어

다음과 같은 연속시간 선형시스템에 대해서 생각해 보자.

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + b(u(t) + d_c) \tag{1}$$

여기서 $x \in \Re^2$, $u \in \Re^1$, $b \in \Re^2$, $d_c \in \Re^1$ 이고, $|d_c| \le D$ 는 외란이다.

위의 시스템에 대해서 스위칭 평면은 아래와 같이 정의할 수 있다.

$$g(x) = c^T x \tag{2}$$

여기서 $c \in \Re^2$ 는 벡터이며, $g(x) = 0$ 이 안정하도록 설계한다. 또한 일반적인 슬라이딩모드 제어기는 아래와 같이 설계할 수 있다[1-3].

$$u(t) = u_{eq}(t) + u_s(t), \tag{3}$$

여기서 $u_{eq} = -(c^T b)^{-1} c^T Ax$, $u_s = -K(c^T b)^{-1}\,\mathrm{sgn}(g(x))$, $K > 0$

이고, $\mathrm{sgn}(g(x)) = \begin{cases} +1, & if\ g(x) \ge 0 \\ -1, & if\ g(x) < 0 \end{cases}$ 와 같다.

아래의 그림 1은 샘플링 기반의 제어 시스템에 대한블록 선도를 나타낸 것이다.

그림 1과 같이 이산화된 제어 시스템은 ZOH (Zero Order Hold)를 포함하고 있으며 (1)의 연속 시간 시스템을 이산시간 시스템으로 다시 나타내면 아래와 같다[7].

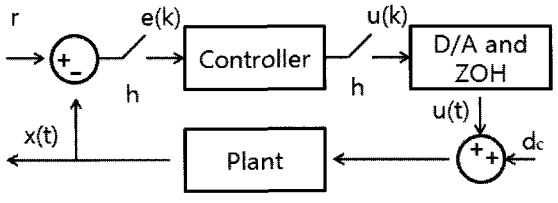


그림 1. 샘플링 기반의 제어 시스템.
Fig. 1. Sampled-data based control system.

$$x(k+1)=\Phi x(k)-K\Gamma s(k)+\Gamma d_c \tag{4}$$

여기서 $\Phi=e^{Ah}-\int_0^h e^{A\tau}d\tau b(c^Tb)^{-1}c^TA\triangleq\begin{bmatrix}1 & v\\ 0 & d\end{bmatrix}$, $\Gamma=\int_0^h e^{Ah}d\tau b$ $\triangleq\begin{bmatrix}\gamma_1\\ \gamma_2\end{bmatrix}$, $s(k)=\mathrm{sgn}(g(x(k)))$ 이고, h 는 샘플링 시간이다.

위의 시스템 (4)를 구성하는 v, d, γ_1, γ_2 는 7가지 형태의 시스템 극점에 대해 연관이 있다[6,7].

III. 이산 슬라이딩 모드 제어의 최종 수렴범위

식 (1)~(2)로 주어지는 시스템에 대해서, A, b, c 가 다음과 같이 주어지는 연속 시간 2차 선형 시스템에 대해서 생각해 보자.

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -a_1 & -a_2\end{bmatrix},\ b=\begin{bmatrix}0\\ b_2\end{bmatrix},\ c=\begin{bmatrix}c_1 & 1\end{bmatrix}^T,\ c_1>0. \tag{5}$$

우리가 적용하고자 하는 일반적인 DC motor 시스템의 경우, 시스템 행렬 A 의 고유치(eigenvalue)는 0과 0이 아닌 실수를 가지고 있다($a_1=0$) [6]. 이 경우, 슬라이딩 모드 제어기는 아래와 같이 다시 쓸 수 있다.

$$u(t)=\frac{1}{b_2}(u_{eq}+K\,\mathrm{sgn}(g(t))),$$
$$g(t)=c_1x_1(t)+x_2(t)=0,$$
$$u_{eq}=(a_2-c_1)x_2$$

여기서 $K>0$ 는 제어 이득이다. 따라서 ZOH를 적용하여 이산화한 시스템의 동적 방정식 (4)는 아래와 같이 다시 쓸 수 있다.

$$x_1(k+1)=x_1+vz(k)-\gamma_1Ks(k)+\gamma_1d_c \tag{6}$$

$$z(k+1)=dz(k)-\gamma_2\frac{1}{b_2}Ks(k)+\gamma_2d_c \tag{7}$$

여기서

$$v=\frac{1-e^{-a_2h}}{a_2}+\frac{(a_2-c_1)}{a_2}\left(h-\frac{1-e^{-a_2h}}{a_2}\right), \tag{8}$$

$$d=e^{-a_2h}+\frac{(a_2-c_1)}{a_2}(1-e^{-a_2h}), \tag{9}$$

$$\gamma_1=\frac{1}{a_2}b_2(h+\frac{e^{-a_2h}}{a_2}-\frac{1}{a_2}), \tag{10}$$

$$\gamma_2=\frac{1}{a_2}b_2(1-e^{-a_2h}), \tag{11}$$

$K=b_2D+\rho$ 이고, $\rho>0$ 이다.

또한, 샘플링 주기가 충분히 짧은 경우에는 Taylor 시리즈의 1차 근사화 방법을 이용하여 v, d, γ_1, γ_2 를 다음과 같이 근사화 할 수 있으며, 이는 일반적인 2차 시스템에 대해서 모두 동일한 결과를 나타낸다[6].

$$v\approx h, \tag{12}$$

$$d\approx 1-c_1h, \tag{13}$$

$$\gamma_1\approx 0, \tag{14}$$

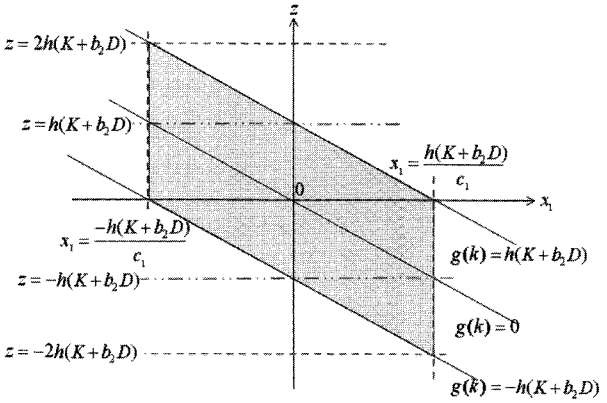


그림 2. $x_1(k)$ 와 $z(k)$ 의 최종 수렴 범위.

Fig. 2. Ultimate bounds of $x_1(k)$ and $z(k)$.

$$\gamma_2\approx b_2h, \tag{15}$$

따라서, 시스템 (6)~(7)은 아래와 같이 다시 쓸 수 있다.

$$x_1(k+1)\approx x_1(k)+hz(k) \tag{16}$$

$$z\ (k+1)\approx dz(k)-hKs(k)+b_2hd_c \tag{17}$$

위의 시스템을 이용하여 스위칭 평면 $g(k)$ 와 정상 상태 오차를 구하면 그림 2와 같은 수렴 범위를 얻는다.
따라서 $x_1(k)$ 와 $z(k)$ 의 최종 수렴 범위는 아래의 정리1과 같이 유도할 수 있다.

정리 1: $x_1(k)$ 와 $z(k)$ 의 최종 수렴 범위는 다음과 같다.

$$z(\infty)\triangleq\lim_{k\to\infty}|z(k)|\le 2h(K+b_2D), \tag{18}$$

$$x_1(\infty)\triangleq\lim_{k\to\infty}|x_1(k)|\le\frac{h(K+b_2D)}{c_1}. \tag{19}$$

증명: 그림 2을 통해 알 수 있다. ■

비고 1: 식 (18)~(19)로부터 샘플링 시간이 짧아지면, $x_1(k)$ 과 $z(k)$ 의 범위도 줄어듦을 알 수 있다.

IV. 실험 및 결과

제안된 이론을 검증하기 위해 TI사의 32BIT Controller인 TMS320F2812 이용하여 DC motor를 제어 하였다. 그리고 우리가 사용한 모터의 계수는 다음과 같다. $a_1=0$, $a_2=40.65$ 이고, $b_2=46.67$ 이다.

그림 3~그림11은 슬라이딩 평면의 기울기 $(-c_1)$ 와 제어 이득 (K) 에 따른 위상 궤적(phase portrait)이며 파란색 실선으로 나타나 있다. 또한 빨강색 점선은 스위칭 평면이며, 검정색 파선 네모는 위에서 유도된 (18)~(19)에 따른 최종 수렴범위를 나타낸다.

실험에 대한 각각의 매개변수 설정을 살펴 보면 그림 3~그림 5는 $c_1=10$, $K=100$ 로 설정했을 때, 각각 8, 4, 2ms의 샘플링 시간을 가질 때의 위상 궤적을 나타낸 것이다.

그리고, $c_1=5$ 로 설정했을 때의 위상 궤적은 그림 6~그림 8에 나타나 있으며, $K=200$, $c_1=10$ 으로 설정했을 때의 위상궤적은 그림 9~그림 11에 나타나 있다.

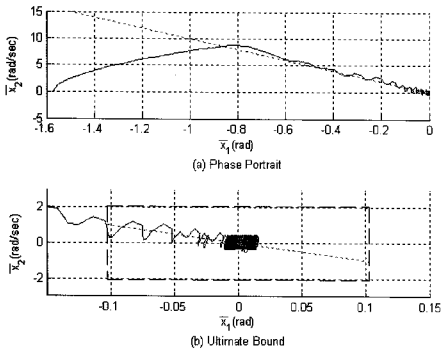


그림 3. 위상궤적 ($c_1 = 10,\ K = 100,$ and $h = 8ms$).

Fig. 3. Phase portrait for $c_1 = 10,\ K = 100,$ and $h = 8ms$.

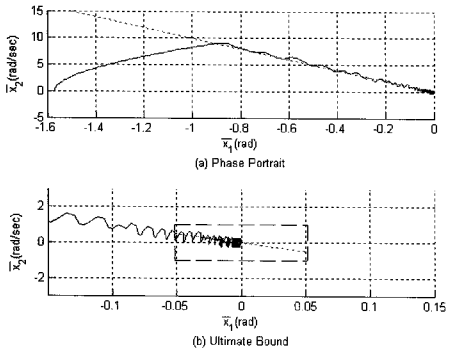


그림 4. 위상궤적 ($c_1 = 10,\ K = 100,$ and $h = 4ms$).

Fig. 4. Phase portrait for $c_1 = 10,\ K = 100,$ and $h = 4ms$.

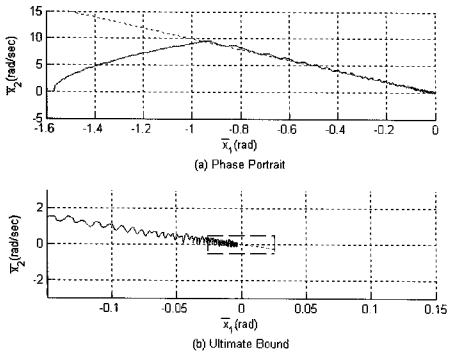


그림 5. 위상궤적 ($c_1 = 10,\ K = 100,$ and $h = 2ms$).

Fig. 5. Phase portrait for $c_1 = 10,\ K = 100,$ and $h = 2ms$.

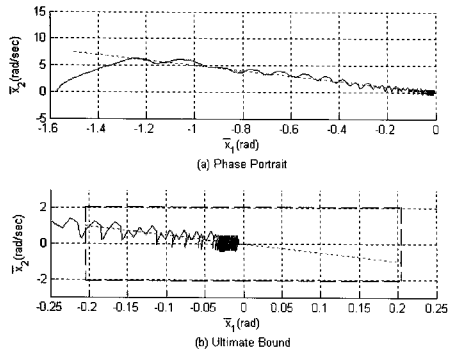


그림 6. 위상궤적 ($c_1 = 5,\ K = 100,$ and $h = 8ms$).

Fig. 6. Phase portrait for $c_1 = 5,\ K = 100,$ and $h = 8ms$.

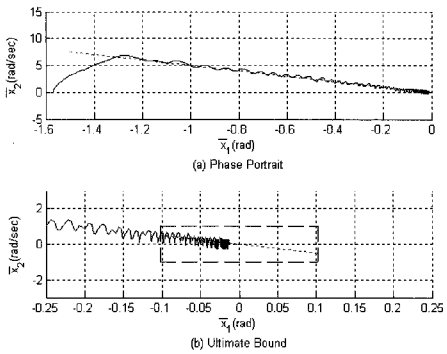


그림 7. 위상궤적 ($c_1 = 5,\ K = 100,$ and $h = 4ms$).

Fig. 7. Phase portrait for $c_1 = 5,\ K = 100,$ and $h = 4ms$.

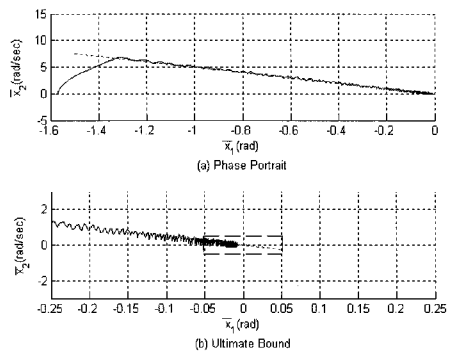


그림 8. 위상궤적 ($c_1 = 5,\ K = 100,$ and $h = 2ms$).

Fig. 8. Phase portrait for $c_1 = 5,\ K = 100,$ and $h = 2ms$.

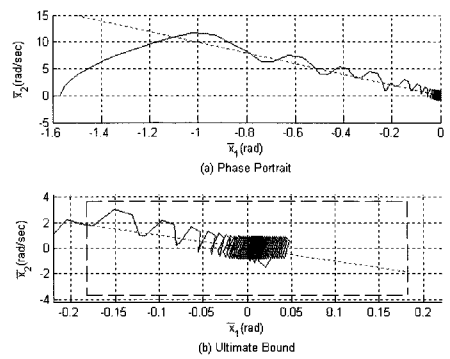


그림 9. 위상궤적 ($c_1 = 10,\ K = 200,$ and $h = 8ms$).

Fig. 9. Phase portrait for $c_1 = 10,\ K = 200,$ and $h = 8ms$.

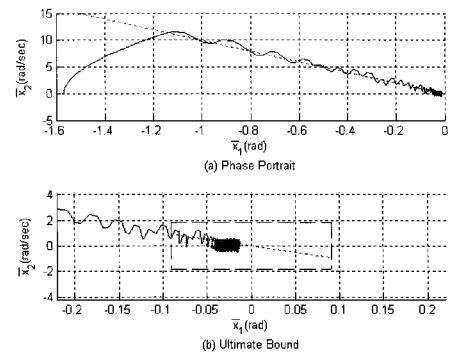


그림 10. 위상궤적 ($c_1 = 10,\ K = 200,$ and $h = 4ms$).

Fig. 10. Phase portrait for $c_1 = 10,\ K = 200,$ and $h = 4ms$.

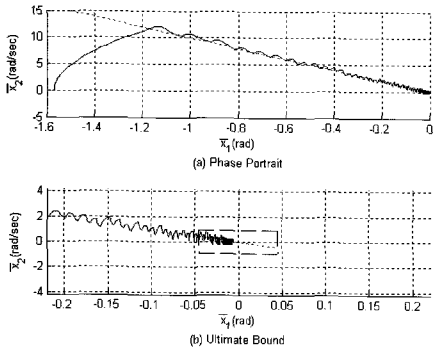


그림 11. 위상궤적 ($c_1 = 10$, $K = 200$, and $h = 2ms$).

Fig. 11. Phase portrait for $c_1 = 10$, $K = 200$, and $h = 2ms$.

그림 3의 경우 이론적으로 얻은 x_1의 수렴 범위가 0.1024, z의 수렴범위가 2.048이고 실제로 얻은 x_1, x_2의 위상 궤적도 정리 1에서 얻은 최종 수렴범위 안으로 수렴하는 것을 볼 수 있다.

또한 그림 4~그림 11에서도 그림 3과 유사한 형태의 결과를 얻을 수 있었으며, 결국 모터 위치 제어 시스템의 최종 수렴범위는 위의 정리 1을 만족하는 것을 알 수 있다.

위의 실험 결과들로부터 알 수 있는 바와 같이 이산화된시스템의 상태변수들 (x_1, z)은 궁극적으로는 최종 수렴범위 안에 항상 수렴함을 알 수 있다. 또한 샘플링 시간이 줄어들수록 수렴범위도 줄어드는 것을 확인 할 수 있다.

V. 결론

본 논문에서는 짧은 샘플링 시간을 갖는 이산화된 슬라이딩 모드 시스템의 최종 수렴 범위에 대해서 DC 모터 시스템에 적용했을 때의 결과를 유도 하고 실험을 통해 타당성을 확인 하였다. 본 논문에서 도출한 결론을 이용하면 연속시간 영역에서 설계한 슬라이딩 모드 제어기를 마이크로 프로세서 또는 컴퓨터 기반의 이산 시간 영역에서 사용할 경우에 대한 최종 허용 오차 범위를 알 수 있으므로, 원하는 오차 범위를 보장받기 위해 필요한 시스템의 사양을 산출하는 근거가 마련된다.

참고문헌

[1] V. I. Utkin, "Variable structure systems with sliding mode," *IEEE Trans. on Automat. Contr.*, vol. 22, no. 2, pp. 212-222, 1977.

[2] J. Y. Hung, W. Gao, and J. C. Hung, "Variable structure control: a survey," *IEEE Trans. on Industrial Electronics*, vol. 40, no. 1, pp. 2-22, 1993.

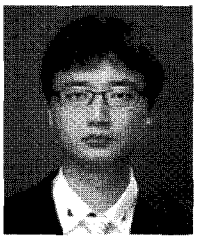
[3] J. E. Slotine and W. Li, *Applied Nonlinear Control*, Prentice Hall, 1990.

[4] C. Edwards and S. K. Spurgeon, *Sliding Mode Control*, CRC, 1998.

[5] X. Yu and G. Chen, "Discretization behaviors of equivalent control based sliding-mode control systems," *IEEE Trans. on Automat., Contr.*, vol. 48, no. 9, pp. 1641-1646, Sep. 2003.

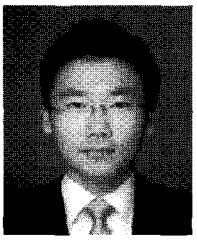
[6] M.-H. Son, H.-Y. Park, and K.-B. Park, "The ultimate bounds of equivalent control based sliding-mode control systems with short sampling time," *Proc. of Int'l Conference on Control, Automation, and Systems*, pp. 1616-1621, 2008.

[7] 박흠용, 조영훈, 박강박, "짧은 샘플링 시간을 갖는 이산 슬라이딩모드 제어 시스템의 최종 수렴 범위," KACC 2009 논문집, 부산, 한국, pp. 757-760, 2009.



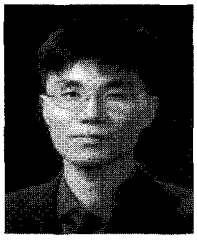
박 흠 용

2008년 고려대학교 제어계측공학과 졸업. 2008년~현재 고려대학교 대학원 제어계측공학과 메카트로닉스전공 석사과정 재학중. 관심분야는 비선형제어, 생체신호.



조 영 훈

2009년 고려대학교 제어계측공학과 졸업. 2009년~현재 고려대학교 대학원 제어계측공학과 메카트로닉스전공 석사과정 재학중. 관심분야는 디지털 제어.



박 강 박

1990년 고려대학교 전자공학과 졸업(공학사). 1992년 한국과학기술원(KAIST) 전기 및 전자공학과(공학석사). 2007년 한국과학기술원(KAIST) 전기 및 전자공학과(공학박사). 1997년~1999년 2월 정보전자연구소 연구원. 1997년 12월~1999년 2월 큐슈공업대학(KIT) 객원교수. 1999년 3월~현재 고려대학교 제어계측공학과 교수. 관심분야는 강인제어, 비선형제어, 로봇제어 등.