

주파수 영역에서의 제어기 설계

■ 강 태 삼

(건국대학교 항공우주정보시스템공학과)

주파수 영역에서 제어기를 설계하기 위해서는 시스템의 대역폭, 최대 주파수 응답, 저주파에서의 이득, 고주파에서의 이득 감소 정도를 고려한다. 또한 나이퀴스트 선도, 보드 선도 등을 활용하여 페루프 제어 시스템의 이득여유, 위상 여유를 확보할 수 있도록 한다. 일반적으로 저주파 영역에서는 개루프의 이득이 기준치보다 크도록 하고, 고주파수 영역에서는 기준치보다 작도록 설계를 하며, 페루프 응답에서 대역폭이 유지되고, 공진피크점의 응답 크기는 1에 비하여 과도하게 크지 않도록 설계를 한다.

1. 표준 2차 제어기에서의 응답 특성 및 요구 설계 사양과 계수와의 관계

일반적으로 제어기는 오차를 0으로 만들거나 주어진 명령을 잘 따라가도록 하기 위해 설계되어진다.

제어기의 성능을 평가하기 위한 요소로는 대역폭, 반응속도, 오버슈트, 정상상태 오차, 안정도의 강인성 등이 고려 대상이다.

시간 영역에서는 계단 입력에 대하여 반응의 정도를 보는데, 그림 1과 같다.

$c(t)$ 를 시스템의 응답 출력이라하고, c_{ss} 를 정상상태의 출력, c_{max} 를 $c(t)$ 의 최대값이라 할 때, 다음과 같은 값들이 시간 영역에서 제어기의 계단 응답 과도 특성을 표현하는데 많이 사용된다.

1. 최대 오버슈트 : $c_{max} - c_{ss}$ 로 정의되며, 퍼센트오버슈트는 $(c_{max} - c_{ss}) / c_{ss} \times 100(\%)$
2. 지연시간 (t_d) : 처음 시작으로 부터 c_{ss} 의 50% 값에 도착

하는 시간

3. 상승시간 (t_r) : 계단 응답이 10%에서 90%에 이르게 걸리는 시간

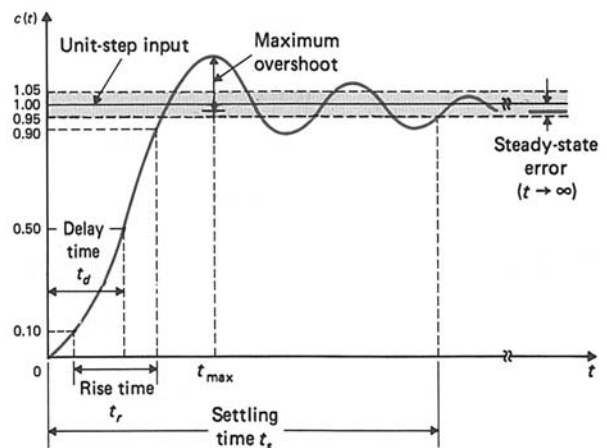


그림 1. 제어 시스템의 응답 특성(1).

4. 정착시간 (t_s) : 계단응답에서 최종값의 일정범위(5%) 안에 이르고, 그후 그 안에 머무르게 되는데 까지 걸리는 최소 시간

5. 정상상태 오차 : $e_{ss} = 1 - c_{ss}$

주파수 영역에서는

1. 공진피크(M_p) : $|M(j\omega)|$ 의 최댓값
 2. 공진 주파수(ω_p) : $|M(j\omega)|$ 가 최댓값 (M_p)를 가질 때의 주파수
 3. 대역폭(BW) : $|M(j\omega)|$ 의 크기가 $\omega = 0$ 일때의 크기에 비하여 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 배(70.7% 또는 -3dB)로 작아지는 주파수까지의 폭
 4. 차단비 : 고주파 영역에서 $|M(j\omega)|$ 의 기울기
 5. 안정도 여유 : 플랜트의 불확실성에 대해 제어시스템이 안정한 정도
 6. 저주파 영역에서의 이득이 기준보다 큰 정도
 7. 고주파 영역에서의 이득이 기준보다 작은 정도
- 제어기 설계에서 사용되는 표준 2차 시스템은 다음과 같이 구성 된다.

$$G(s) = \frac{C(s)}{E(s)} = \frac{\omega_n^2}{s(s + 2\zeta\omega_n)} \quad (1)$$

그림 2와 같은 단위 피드백 시스템

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad (2)$$

에서 특성 방정식은 다음과 같이 주어진다.

$$\Delta(s) = s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = 0 \quad (3)$$

이때 단위 계단 입력, $R(s) = 1/s$ 에 대한 출력은 다음과

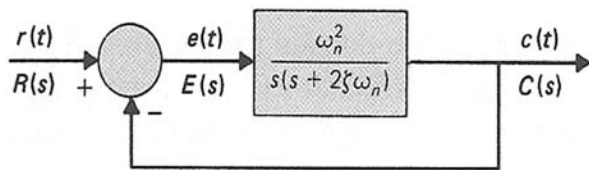


그림 2. 표준 2차 제어 시스템.

같다.

$$C(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)} \quad (4)$$

부하계수 ζ 가 0과 1 사이에 있는 경우 라플라스 역변환을 취하면

$$c(t) = 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t + \cos^{-1} \zeta), \quad t \geq 0 \quad (5)$$

이 된다. 여기서 보면 응답은 부하계수 ζ 와 공진주파수 ω_n 에 의하여 결정됨을 알 수 있다. 응답이 안정되기 위해서는 ζ 가 양수이어야 하며, ζ 가 1보다 클 경우는 진동하지 않는 해를 가진다. ζ 가 음수인 경우 응답은 발산한다. 공진주파수 ω_n 은 응답의 반응속도와 관계가 깊다. 즉 반응이 약 63% 완료되는 시간을 결정하는 시상수는 $\tau = 1/(\zeta\omega_n)$ 와 같이 결정되므로, 부하계수가 크고, 고유주파수가 클수록 응답이 빨라진다고 볼 수 있다.

제어기 설계시 주안점은 시간 영역에서 보면, 최대 오버슈트를 줄이면서 상승 시간과 지연시간, 정착시간이 짧고, 정상상태 오차가 작도록 하면 된다. 상승시간, 지연시간, 그리고 정착시간은 다음과 같이 고유주파수와 부하계수의 함수로 근사화된다.

$$\begin{aligned} t_d &= \frac{1.1 + 0.125\zeta + 0.469\zeta^2}{\omega_n} \\ t_r &= \frac{1 - 0.4167\zeta + 2.917\zeta^2}{\omega_n} \quad 0 < \zeta < 1 \\ t_s &= \frac{3.2}{\zeta\omega_n} \quad 0 < \zeta < 0.69 \end{aligned} \quad (6)$$

주파수 영역에서 사용되는 설계 패러미터는 다음과 같이 부하계수와 고유주파수의 함수로 표현된다.

$$\begin{aligned} M_p &= \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}} \quad \zeta \leq 0.707 \\ \omega_p &= \omega_n \sqrt{1-\zeta^2} \quad \zeta \leq 0.707 \\ BW &= \omega_n \left[(1-\zeta^2) + \sqrt{4\zeta^4 - 4\zeta^2 + 2} \right]^{1/2} \end{aligned} \quad (7)$$

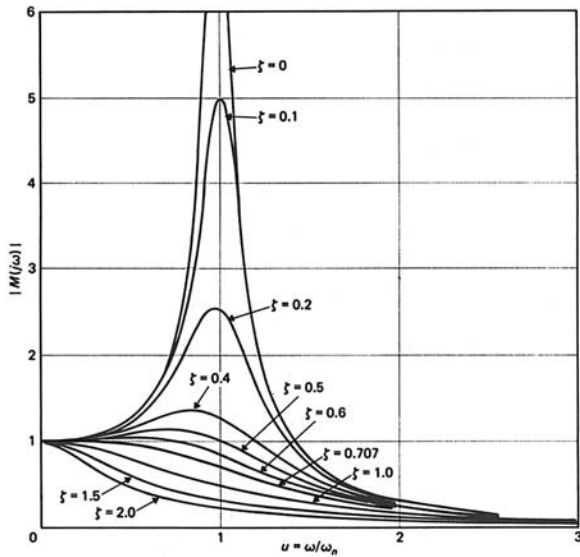


그림 3. 부하계수에 따른 주파수 응답 특성(1).

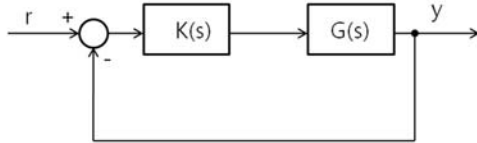


그림 4. 폐루프 제어 시스템 구조.

그림 3은 부하계수와 고유주파수, 그리고 주파수 응답의 관계를 보여 주고 있다.

(6), (7)을 살펴보면 주어진 고유주파수 ω_n 에 따라 부하계수 ζ 를 조절함으로써 요구되는 설계 사양들의 만족 정도를 조절할 수 있음을 알 수 있다.

2. 주파수 영역에서의 제어기 설계시 고려 사항

이제 그림 4와 같이 음의 되먹임이 있는 폐루프 제어 시스템을 고려하자.

여기서 $K(s)$ 는 제어기의 전달함수를 나타낸다. 이때, 기준 입력 r 에서 폐루프 출력 y 에 이르는 전달함수 $T(s)$ 는 다음과 같이 주어진다.

$$T(s) = \frac{G(s)K(s)}{1 + G(s)K(s)} \quad (8)$$

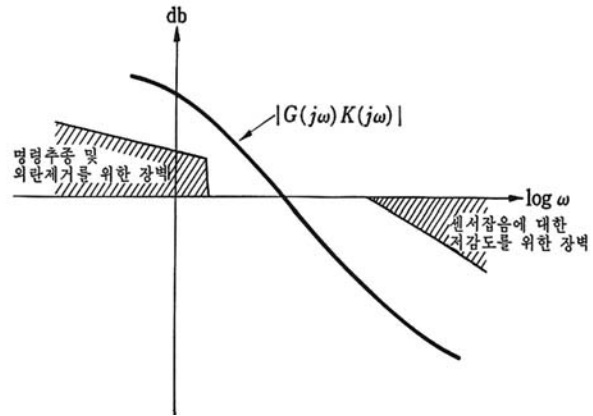


그림 5. 제어 루프전달함수의 요구조건(3).

여기서 전체 폐루프 시스템의 안정성은 $T(s)$ 의 특성방정식

$$\Delta(S) = 1 + G(s)K(s) \quad (9)$$

의 영점(zero)에 의하여 결정된다.

이때, 감도 함수 $S(s)$ 와 상보감도 함수 (complementary sensitivity function) $T(s)$, 루프 전달함수 $L(s)$ 는 다음과 같이 정의된다.

$$\begin{aligned} S(s) &= \frac{1}{1 + G(s)K(s)} \\ T(s) &= \frac{G(s)K(s)}{1 + G(s)K(s)} = 1 - S(s) \\ L(s) &= G(s)K(s) \end{aligned} \quad (10)$$

주파수 영역에서의 설계는 간략하게 요약하면 1. 안정도 여유를 확보하는 것, 2. 루프 전달함수의 크기를 그림 5에서와 같이 원하는 저주파 영역에서는 크게, 원치 않는 고주파 영역에서는 작게 유지하며, 주파수가 증가함에 따라 폐루프의 전달함수(상보감도함수)가 동작영역보다 커지는 주파수 범위에서 충분히 빠르게 감쇄하도록 하면 된다.

안정도 여유를 확보하기 위해서는 나이퀴스트 정리에 따라, 최소위상 시스템의 경우 위상 응답이 -180° 가 되는 주파수에서의 루프 전달함수의 크기가 $1(0\text{dB})$ 에 비하여 충분히 작도록 하면 된다. 이 작은 정도가 이득여유이며 보통 데시벨로 표현한다. 루프전달함수의 크기에 상용로그를 취한 후 -20 을 곱해 주면 이 값이 이득여유에 해당 된다. 또한 안정도 여유를 확보

하기 위해서는 위상 여유가 30도 정도 이상은 되어야 하는데, 위상 여유는 루프전달함수의 크기가 1이 되는 주파수에서의 위상이 -180도 보다 얼마나 큰가에 의해 결정된다. 보통 이득 여유가 충분하면, 위상 여유도 어느 정도는 확보되는 경향이 있다. 이것이 충분치 못할 때에는 제어기 $K(s)$ 의 설계인자들을 조절하여, 루프전달함수의 주파수 응답 특성을 바꾸어주면 된다. 한편 일반적으로 영점(이득교차점)을 지나는 부근에서의 루프전달함수의 기울기는 급하지 않은 것이 안정도 여유 확보에 도움이 되는 것이 알려져 있다는 것을 유의할 필요가 있다[2,3].

3. 주파수 영역에서의 제어기 설계 예

다음과 같이 주어지는 태양 추적기(sun seeker)에 필요한 제어기를 설계하는 경우를 고려하자. 태양 추적기는 위성체 등에서 태양을 추적하기 위해 쓰이는 장치이다. 입력은 명령각 (θ_r)고, 출력(θ_o)은 태양 추적기의 자세각이다[1].

$$G(s) = \frac{2500}{s(s+25)} \quad (11)$$

요구되어지는 설계 사양은 다음과 같다.

1. 경사입력(ramp input) 명령에 대해 정상상태 오차는 1% 이내
2. 계단 입력시 최대 오버슈트는 15% 이내
3. 이득여유 10 dB 이상, 위상 여유 45도 이상
4. BW 100 rad/sec 이상

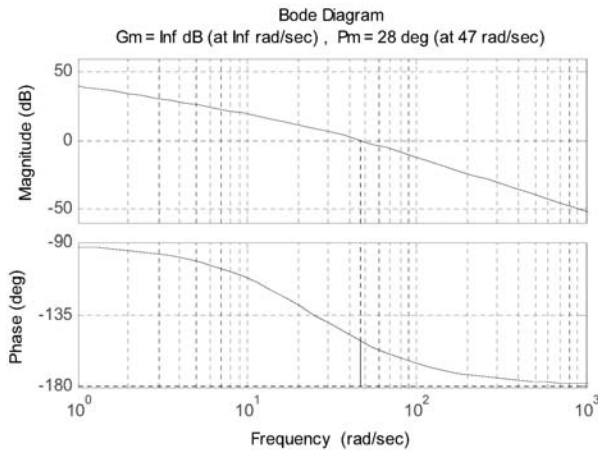


그림 6. 플랜트의 주파수 응답 특성.

이러한 사양을 만족시키는 제어기를 설계해 보자.

먼저 플랜트 $G(s)$ 의 주파수 응답은 그림 6과 같다. 그림 6을 보면 이 시스템은 영점 크로스오버 주파수가 대략 47 rad/sec이고, 따라서 대략적으로 BW도 50 rad/sec 정도 되는 것을 예측할 수 있다. 이득 여유는 무한대이고, 위상여유는 28도 정도이다. 따라서 이득 여유는 요구조건에 만족되지만 위상 여유는 요구조건보다 작아 개선이 요구된다. 실제로 $K(s) = 1$ 로 두었을 때 폐루프 시스템의 전달함수는

$$T(s) = \frac{G(s)K(s)}{1+G(s)K(s)} = \frac{\frac{2500}{s(s+25)}}{1 + \frac{2500}{s(s+25)}} = \frac{2500}{s(s+25)+2500} \quad (12)$$

이고 이것의 보드 선도는 그림 7과 같다. 그림 7에서 보면 설계의 BW는 70 rad/sec 정도이다. 따라서 대역폭을 넓히기 위해서는 그림 6에서 볼 때, 이득을 더 크게하는 것이 필요하다. 한편 위상 여유를 키우기 위해서는 원하는 대역폭인 100 rad/sec에서 위상각이 -135도 보다 커야(크기는 작아야) 한다. 이를 위해서는 제어기 $K(s)$ 가 이 부근에서 미분(lead) 성분을 가지는 것이 필요하다.

한편 경사입력에 대한 정상상태 오차는 다음과 같이 주어진다.

$$E_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s}{1+G(s)K(s)} \frac{1}{s^2} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s(1+G(s)K(s))} \quad (13)$$

따라서, 이것이 유한한 값을 가지며, 0.01보다 작아지는 것이 필요하다. $G(s)$ 자체가 $s=0$ 에서 극점을 가지고 있으므로

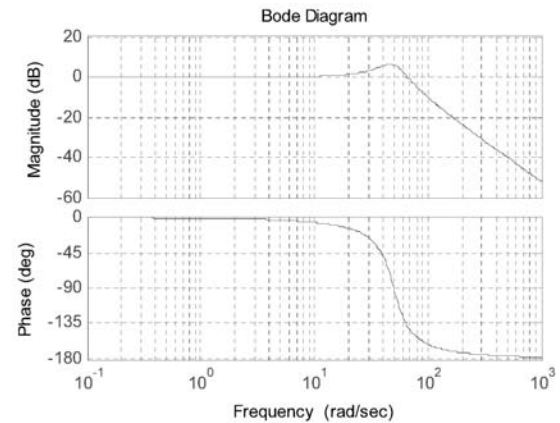


그림 7. 플랜트의 당위 피드백 시스템 주파수 응답 특성.

$K(s)$ 는 원점에 극점을 가지지 않아도 된다.

$$E_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s(1+G(s)K(s))} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{sG(s)K(s)} \quad (14)$$

여기서 $sG(s)$ 는 $s=0$ 일 때 100임을 고려하면 $K(s)$ 가 $s=0$ 일 때 1 이상이면 경사 입력에 대한 정상상태 오차 조건을 만족시킬 수 있음을 알 수 있다. 따라서 $K(s)$ 의 가능한 후보를 다음과 같이 놓을 수 있다.

$$K(s) = k \frac{s/c + b}{s + a} \quad (15)$$

a, b, c 가 양수일 경우 $K(s)$ 를 분석해 보면 분자는 주파수가 bc 보다 작을 때는 상수처럼, 주파수가 bc 보다 클 때는 미분처럼 동작함을 알 수 있다. 또한 비슷한 이유로 분모항을 보면 분모는 주파수가 a 보다 작을 경우는 상수항으로, 주파수가 a 보다 클 경우는 적분기와 유사하게 동작을 한다. 따라서 100 rad/sec 부근에서 위상을 앞서게 하기 위해서는 bc 를 100근처의 값으로 두고 a 는 bc 보다 보다 좀 큰 수로 두면 제어기는 bc 보다 작은 주파수 범위에서는 상수이득 kb/ac , 주파수가 a 와 bc 사이에 있을 때에는 위상을 앞서가게 하는 회로로 동작하고, 주파수가 bc 보다 많이 더 커지게 되면 이득이 k/c 인 상수 제어기처럼 동작을 하게 된다.

그림 7은 $a=150, b=100, c=1, k=1$ 일 때의 주파수 응답을 보여 준다. 이것을 보면 100 rad/sec에서 위상이 올라가기는 하지만 최고 11도 정도밖에 되지 않는다. 이것은 a 가 150인데, 미분기능이 100 rad/sec에서 시작 된 후 얼마 되지 않아 적분기능이 시작되어 상쇄되기 때문으로 보인다. 따라서 a 를 충분히 크게 하고, b 는 작게 할 필요가 있다. $a=300, b=50$ 으로 바꾸었을 때의

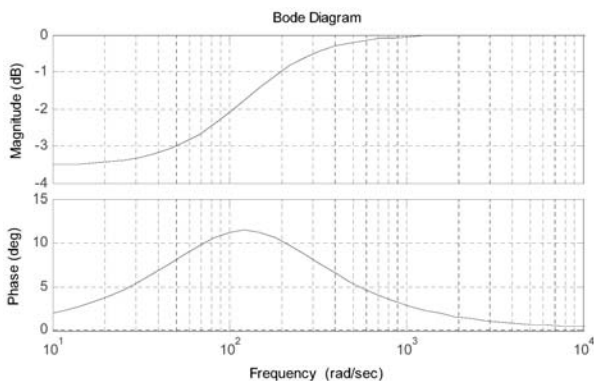


그림 8. 제어기 K1의 주파수 응답 특성.

제어기 $K(s)$ 의 주파수 응답 특성은 다음과 같다.

그림 9에서 보면, 예상대로 100 rad/sec 근처에서 위상이 많이 앞서가게 되어 전체 폐루프 $G(s)K(s)$ 의 위상 여유를 많이 개선할 것을 기대할 수 있다. 그런데 저주파에서의 이득이 -15dB 정도로 매우 작아서 전체 루프의 이득이 작아 질 수 있다. 제어기의 저주파에서의 이득은 kb/a 인데, $b=50, a=300$ 이므로 이득이 작아진 것이다. 이를 보상하기 위해서 $k=6$ 으로 두면 저주파수에서의 이득이 1로 될 것을 예상할 수 있다. 고주파수에서의 이득은 k/c 가 되는데, 따라서 $c=6$ 으로 두면 고주파수에서의 이득도 1이 될 것을 예상 할 수 있다. 그러나 c 를 크게 하

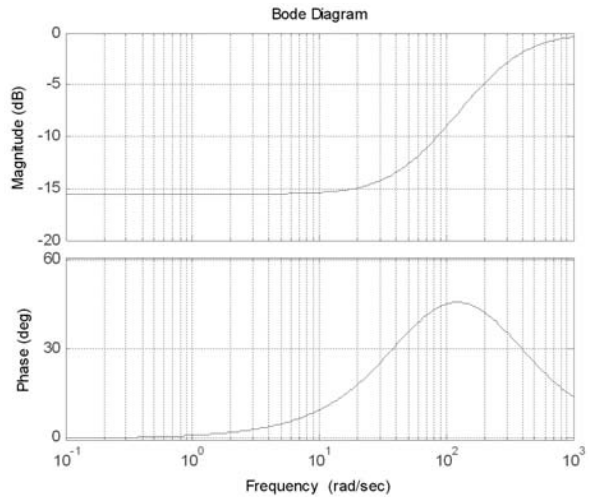


그림 9. 제어기 K의 주파수 응답 특성($a=300, b=50, c=k=1$).

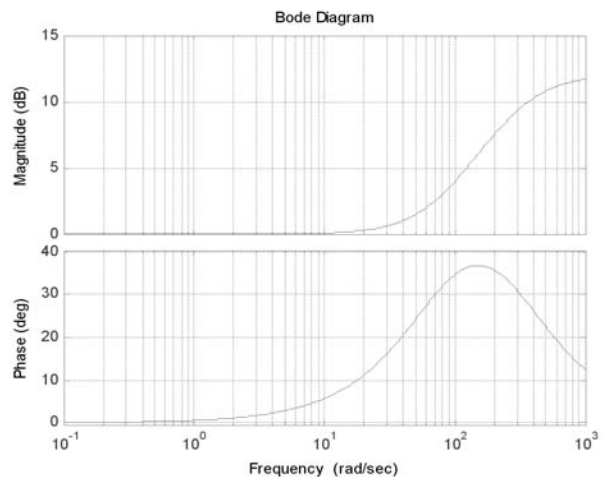


그림 10. 제어기 K의 주파수 응답 특성($a=300, b=50, k=6, c=1.5$).

는 것은 제어기의 분자항에서 미분의 기능을 약화시키는 것이므로 위상 앞섬이 작아지게 되는 효과를 가져온다. 따라서 $a=300, b=50, c=1.5, k=6$ 으로 두었을 때 제어기 $K(s)$ 의 보드 선도는 그림 10과 같다.

그림 10을 보면 100 rad/sec 부근에서 위상은 35도 정도를 앞서가고, 저주파 이득은 0 dB, 고주파 이득은 12dB 정도임을 보여 준다. 따라서, 본 제어기를 사용하면 100 rad/sec 부근에서 위상이 최고 36도 정도까지 앞서가게 되는 것을 알 수 있다. 전체적인 이득은 k의 값을 조절하면 위상에 영향을 주지 않으면서 영점 교차점을 바꾸어 대역폭을 조절할 수 있다.

이때 $L(s) = G(s)K(s)$ 의 주파수 응답은 다음과 같다.

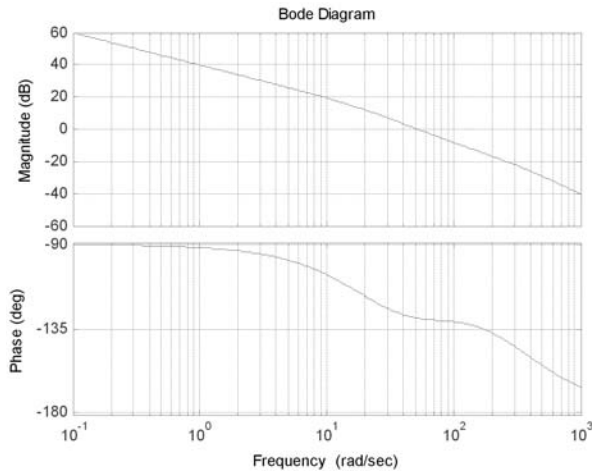


그림 11. $G(s)K(s)$ 의 주파수 응답($a=300, b=50, k=6, c=1.5$).

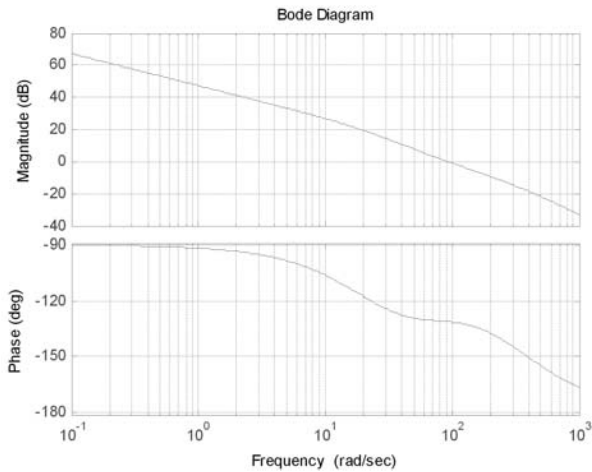


그림 12. $G(s)K(s)$ 의 주파수 응답($a=300, b=50, k=14, c=1.5$).

그림 11을 보면 위상 여유는 45도 이상이나, 이득 교차점이 50 rad/sec로 대역폭이 100 rad/sec에 못미칠 것이 예상된다. 이득교차점을 100rad/sec로 하기 위해서는 7 dB 정도 이득이 더 필요하며, 이는 이득이 약 2.3배 정도 증가해야됨을 의미한다. 즉, k를 대략 14정도로 두면 이득 교차점이 100 rad/sec 이상 되어 대역폭 조건을 만족시킬 수 있을 것으로 기대 된다.

그림 12를 보면 예상대로 이득교차점이 100 rad/sec 부근으로 이동했고, 이때의 이득여유는 무한대, 위상 여유는 49도 정도로 안정도 여유 조건을 만족시킴을 알 수 있다. 이때 페루프 $T(s) = G(s)K(s)/(1 + G(s)K(s))$ 의 주파수 응답 특성은 그림 13과 같다.

그림 13을 보면 예상대로 대역폭이 105 rad/sec 정도로 설계 사양인 100 rad/sec를 만족함을 알 수 있다.

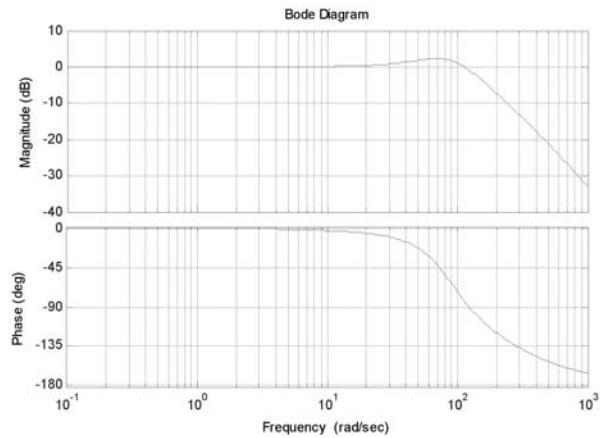


그림 13. $T(s)$ 의 주파수 응답($a=300, b=50, k=14, c=1.5$).

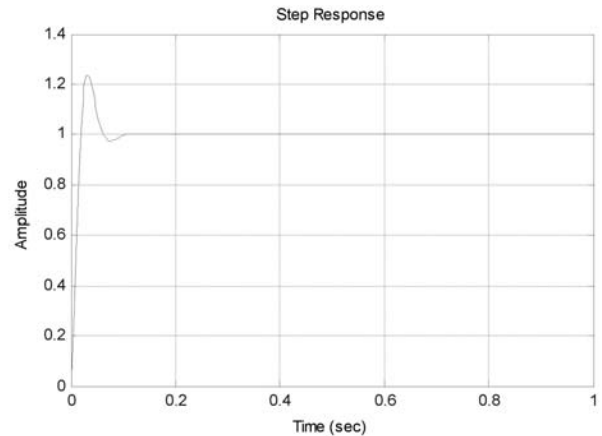


그림 14. $T(s)$ 의 계단 입력 응답($a=300, b=50, c=1.5, k=14$).

마지막으로 최대 오버슈트는 그림 13에서의 공진 피크와 관련이 깊은데, 공진점에서 약간 증가하는 경향이 있다. 실제로 계단 입력 응답을 구해 보면 그림 14와 같은 데 최대 오버슈트가 요구 사항인 20%보다 커지는 것을 볼 수 있다. 따라서, 이를 줄이기 위해서 미분 성분을 좀더 키울 필요가 있다.

따라서 다른 계수는 그대로 두고 c를 1로 변화시켜 볼 필요가 있다. 이때의 $G(s)K(s)$ 및 $G(s)K(s)/(1+G(s)K(s))$ 의 주파수 응답은 각각 그림 15, 그림 16과 같다. 그림 15, 16에서 보면 미분 성분의 증가로 위상 여유는 더욱 증가하여 이득 여유는 무한대, 위상여유는 약 58도 정도로 증가하여 여전히 안정도 여유 조건을 만족시킴을 알 수 있다. 또한 이때 제어기의 저주파에서의 제로 주파수에서의 이득은 $k \times b/a=1$ 로 경사

입력 오차에 대한 요구 조건을 만족시킬 것을 예상할 수 있다.

또한 그림 16에서 보면 공진 피크가 감소하여 오버슈트가 감소할 것을 예상할 수 있다. 그림 17은 이때의 계단 입력 응답을 보여주고 있는데, 오버슈트가 약 14.8% 정도로 목표치인 15% 이하 조건을 만족시키고 있음을 알 수 있다.

4. 결론

본 소고에서는 주파수 분석을 통하여 간략하게 제어기를 설계하는 방법을 예제를 통하여 설명하였다. 위상 여유를 조정하기 위해서는 미분이나 적분 성분이 원하는 주파수 범위에서 영향을 미치도록 하면 되고, 전체적인 이득은 제어기의

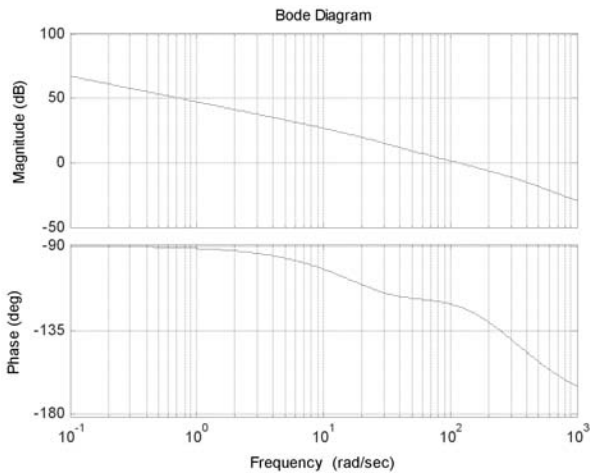


그림 15. $G(s)K(s)$ 의 주파수 응답($a=300, b=50, c=1, k=14$).

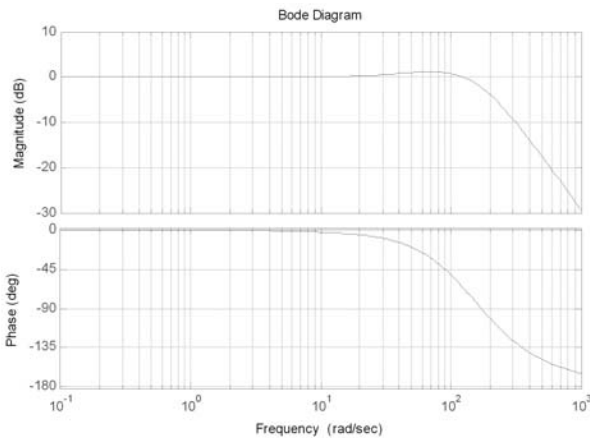


그림 16. $T(s)$ 의 주파수 응답($a=300, b=50, c=1, k=14$).

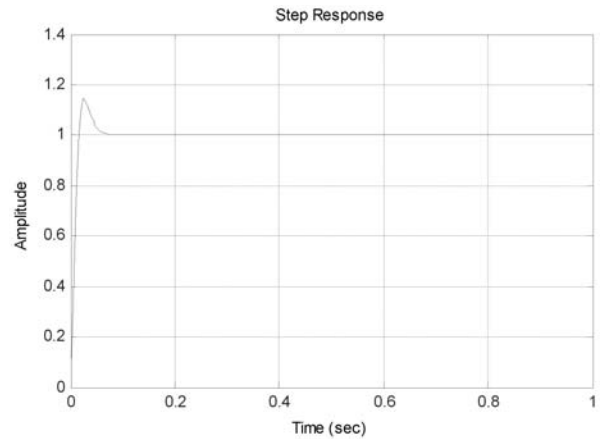


그림 17. $T(s)$ 의 계단 입력 응답.

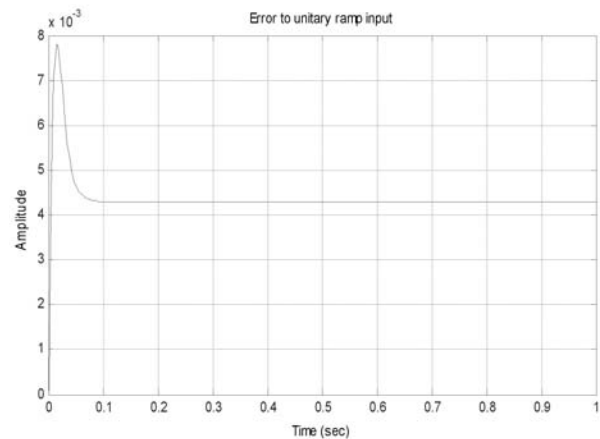


그림 18. $T(s)$ 의 단위 경사 입력에 대한 오차 응답($a=300, b=50, c=1.5, k=14$).

직류 이득 조절을 통하여 이루도록 하면 된다. 오버슈트를 줄이기 위해서는 부하계수를 늘이면 되는데 미분 성분에 의한 피드백이 그 역할을 한다. 본 소고에서 제어기는 간단한 지상진상(lead lag) 제어기를 사용하였는데, 일반적인 PID 제어기도 같은 개념으로 접근할 수 있다.

참고문헌

- [1] B.C.KUO, *Automatic Control Systems*, Prentice-Hall International Editions, 1991.
- [2] K. Zhou and J.C. Doyle, *Essentials of Robust Control*, Prentice Hall, 1998.
- [3] 김종식, 선형제어시스템 공학, 청문각, 1992.

저 자 약 력



강 태 삼

- 1986, 1988, 1992년 서울대학교 제어계측 공학과 학사, 석사, 박사졸업.
- 1999년~2001년 호서대학교 제어계측공학과 교수,
- 2001년~현재 건국대학교 항공우주정보시스템공학과 교수.

· 관심분야 : 자동제어 및 비행제어 응용, 관성 센서 및 응용