

# 동일한 전달 행렬을 가지는 안정화 가능한 이종 시스템들의 출력 일치

## Output Consensus of Non-identical and Stabilizable Linear Systems Having the Same Transfer Matrix

김 지 수, 김 흥 근\*, 심 형 보, 백 주 훈  
(Jisu Kim<sup>1</sup>, Hongkeun Kim<sup>1</sup>, Hyungbo Shim<sup>1</sup>, and Juhoon Back<sup>2</sup>)

<sup>1</sup>Seoul National University

<sup>2</sup>Kwangwoon University

**Abstract:** This paper studies the output consensus problem for a class of heterogeneous linear multi-agent systems under a fixed directed communication network. The dynamics, as well as its dimension, of each agent can widely differ from the others, but all the agents are assumed to have the same transfer matrix. In addition, only the system outputs are constrained to be delivered through the network. Under these conditions, we show that the output consensus is reached by a group of identical controllers, which is designed to achieve the state consensus for the homogeneous multi-agent system obtained from the minimal realization of the transfer matrix. Finally, an example is given to demonstrate the proposed result.

**Keywords:** heterogeneous multi-agent systems, output consensus, output coupling, internal model principle

### I. 서론

최근 학계에서는 다개체 시스템(multi-agent systems, MASs)의 일치 문제가 많은 관심을 받고 있다. 다개체 시스템이란 여러 개의 개별 시스템들이 네트워크 통신을 이용해서 특정 정보를 주고받는 시스템을 말한다. 또한 그 시스템의 일치란 각 개체의 특정 정보들(가령 출력이나 상태변수, 또는 상태변수의 일부분 등이 모두 같아지는 것을 뜻한다. 이러한 다개체 시스템이 학계에서 많은 관심을 받고 있는 이유는 무인 항공기의 편대 제어, 이동 로봇들 간의 협업, 여러 대의 센서를 이용한 감시 체계 구축과 같은 공학적 관점뿐만 아니라, 생물학적 그리고 물리화학적 관점에서 그 응용 사례가 많기 때문이다[2,4,5,8,11-18].

이러한 분위기를 반영하여 각 개체의 동역학이 모두 같은 동종 다개체 시스템의 일치 문제에 대한 많은 연구가 진행되어 왔다[5,7,8,13,15-18]. 하지만 모든 시스템들이 (모델링 오차나 불확실성과 같은 연유로) 완전히 같을 수는 없다는 사실로부터, 최근 이종 다개체 시스템에 대한 연구가 진행되었다[9,20-22]. 논문 [20,21]에서는 내부 모델 원리(internal model principle, [1,6])에 근간하여, 이종 다개체 시

스템이 출력 일치를 이루기 위해서는 (제어기 동역학까지 포함하여) 각 개체들이 공통된 모드를 포함하고 있어야 한다는 필요조건을 제시하였다. 이 결과를 바탕으로 [9,22]에서는 그 공통된 모드를 제어기에 삽입해 넣어(embedding) 출력 일치 문제를 해결하는 기법들을 제시하였다.

본 논문에서는 방향성 그래프로 묘사되는 네트워크 통신을 하는 선형 이종 다개체 시스템의 출력 일치 문제를 다룬다. 특히, 앞에서 언급한 공통된 모드를 제어기에 삽입하는 기법이 아닌, 각 개체 자체가 서로 같은 전달 행렬을 가지는 경우를 다룬다. 즉, 개체들의 동역학이 모두 다를 수는 있으나 그 입출력 관계가 같은 경우에 대하여 출력 일치 문제의 해법을 제시한다. 제어기에 공통된 모드를 삽입하는 경우 그 인위적인 모드에 의해서 이종 다개체 시스템의 출력 일치 궤적이 결정되는데 반해, 이 경우 각 개체의 특정 공통된 동역학에 의해서 출력 일치 궤적이 결정된다.

**표기법:** 본 논문에서는 방향성 그래프(directed graph)를  $\mathbb{G}=(\mathbb{N},\mathbb{E},\mathbb{A})$ 와 같이 표기한다. 여기서  $\mathbb{N}:=\{1,2,\dots,N\}$ 는 노드(node)들의 집합을,  $\mathbb{E}\subseteq\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ 는 노드들의 순서쌍을 원소로 가지는 엣지(edge) 집합을,  $\mathbb{A}=[\alpha_{ij}]\in\mathbb{R}^{N\times N}$ 는 가중치 인접 행렬(weighted adjacency matrix)을 나타낸다. 방향성 그래프에서 엣지  $(i,j)\in\mathbb{E}$ 는 노드  $i$ 에서 노드  $j$ 로 가는 화살표로 표시되며, 이는 가중치 인접 행렬과 다음과 같이 연관되어 있다:  $(i,j)\in\mathbb{E}$ 이면  $\alpha_{ji}>0$ 이고, 그렇지 않을 경우, 즉  $(i,j)\notin\mathbb{E}$ 이면  $\alpha_{ji}=0$ 이다. 노드  $i$ 의 이웃 집합은  $\mathbb{N}_i:=\{j\in\mathbb{N}:(j,i)\in\mathbb{E}\}$ 로 정의된다. 노드  $i$ 에서 노드  $j$ 까지 (길이  $l$ 의) 경로는 노드들의 순열  $(i_1,i_2,\dots,i_{l+1})$ 로 정의된다. 여기서  $i_1=i$ ,  $i_{l+1}=j$ , 그리고 모든  $k=1,2,\dots,l$ 에

\* 책임저자(Corresponding Author)

논문접수: 2011. 7. 8., 수정: 2011. 7. 28., 채택확정: 2011. 8. 9.

김지수, 김흥근, 심형보: ASRI, 서울대학교 전기공학부

(jskim06@cdsl.kr/hkkim@cdsl.kr/hshim@snu.ac.kr)

백주훈: 광운대학교 로봇학부(backhoon@kw.ac.kr)

※ 본 논문은 2011년도 정부(교육과학기술부)의 재원으로 한국연구재단의 기초연구사업(No. 2011-0001276)과 2011년도 지식경제부의 인간-로봇 협업 매니플레이션 기술개발 사업(No. 10031951)의 공동 지원을 받아 수행되었음.

※ 본 논문의 예비 버전이 2011년 제26회 ICROS 학술대회에 출판되었음.

대해  $(i_k, i_{k+1}) \in \mathbb{E}$ 이며, 경로 내에 노드 중복은 없다. 만약 방향성 그래프  $\mathbb{G}$ 에 특정한 노드  $i \in \mathbb{N}$ 가 있어서 그 노드에서 다른 모든 노드까지의 경로가 각각 존재한다면, 그 그래프는 연결되었다고 말한다. 특히 그 노드  $i$ 를 루트(root)라 부른다.

방향성 그래프  $\mathbb{G}$ 의 라플라시안 행렬(Laplacian matrix)  $L = [l_{ij}] \in \mathbb{R}^{N \times N}$ 은  $L := \mathbb{D} - \mathbb{A}$ 로 정의되며, 여기서  $\mathbb{D} := \text{diag}(\mathbb{A}1_N)$ 이고  $1_N \in \mathbb{R}^N$ 은 모든 성분이 1인 열벡터이다. 라플라시안 행렬의 정의로부터 쉽게 알 수 있듯이,  $L$ 은 항상 0을 고유치로 가지고,  $1_N$ 은 그에 대응되는 고유벡터이다. 또한 거쉬고린 디스크 정리(Gershgorin disk theorem)에 의해 0이 아닌 다른 모든 고유치들의 실수부는 양수이다. 위의 사실에 기인해 편이상  $\lambda_1(L) = 0$ 으로 둔다. 만약 방향성 그래프  $\mathbb{G}$ 가 연결되어 있다면, 행렬  $L$ 의 고유치 0에 대한 대수적 중복도(algebraic multiplicity)는 1이다 [13,20]. 즉,  $i = 2, 3, \dots, N$ 에 대해  $\lambda_i(L) \neq 0$ 이다.

## II. 본론

### 1. 문제 정의 및 선행 지식

다음과 같은 일반적인 다중 입출력 선형 시불변(MIMO LTI) 동역학으로 표현되는  $N$ 개의 시스템들을 고려하자.

$$\begin{aligned} \dot{x}_{G_i} &= A_{G_i}x_{G_i} + B_{G_i}u_i, & x_{G_i} &\in \mathbb{R}^{n_i}, u_i \in \mathbb{R}^p, \\ y_i &= C_{G_i}x_{G_i}, & y_i &\in \mathbb{R}^q. \end{aligned} \quad (1)$$

여기서  $i \in \mathbb{N} = \{1, 2, \dots, N\}$ 는 개체의 식별번호를 나타내고,  $(A_{G_i}, B_{G_i})$ 는 안정화 가능(stabilizable)하다. 동종 다개체 시스템(homogeneous MASS)과 달리, 상태변수의 차수 및 시스템 행렬  $A_{G_i}, B_{G_i}, C_{G_i}$ 들이 각 개체마다 모두 다를 수 있다는 점을 유의하라. 또한 행렬 쌍  $(A_{G_i}, C_{G_i})$ 에는 (가령 검출 가능성(detectability)과 같은) 어떠한 제한 조건도 부과되지 않은 점도 유의하라.

다개체 시스템 (1)에 대해 네트워크 연결 관계(network topology)는 방향성 그래프  $\mathbb{G} = (\mathbb{N}, \mathbb{E}, \mathbb{A})$ 로 모델링된다고 가정한다. 즉, 노드  $i \in \mathbb{N}$ 은  $i$ 번째 개체를, 엣지  $(i, j) \in \mathbb{E}$ 와 가중치  $\alpha_{ji} > 0$ 는  $j$ 번째 개체가  $i$ 번째 개체의 출력 정보  $y_i$ 를 가중치  $\alpha_{ji}$ 만큼 받는 것을 의미한다.

이러한 상황에서, 본 논문에서는 다개체 시스템 (1)이 다음과 같은 조건

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|y_i(t) - y_j(t)\| = 0, \quad \forall i, j \in \mathbb{N}$$

을 만족시키도록 하는 제어기

$$\begin{aligned} \dot{x}_{K_i} &= A_{K_i}x_{K_i} + B_{K_i}z_i, & x_{K_i} &\in \mathbb{R}^{m_i}, \\ u_i &= C_{K_i}x_{K_i} + D_{K_i}z_i, \\ z_i &= \sum_{j \in \mathbb{N}_i} \alpha_{ij}(y_j - y_i) = - \sum_{j \in \mathbb{N}} l_{ij}y_j \end{aligned} \quad (2)$$

를 설계하는 문제를 다룬다. 이를 앞으로 다개체 시스템의 출력 일치 문제라 하겠다. 여기서 자명한 출력 일치 문제는 다루지 않겠다. 즉,  $i \in \mathbb{N}$ 에 대해  $\lim_{t \rightarrow \infty} y_i(t) = 0$ 이 되는

경우는 본 논문에서 고려하지 않는다. 또한 이종 다개체 시스템의 경우, 상태 변수 일치  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x_{G_i}(t) - x_{G_j}(t)\| = 0$ 를 일반적으로 이룰 수 없다는 점에 유의하라.

제어기 (2)와 함께 개별 개체 (1)의 동력학은 다음과 같이 나타나진다.

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= A_i x_i + B_i z_i, \\ y_i &= C_i x_i. \end{aligned} \quad (3)$$

여기서  $x_i := \text{col}(x_{G_i}, x_{K_i}) \in \mathbb{R}^{n_i + m_i}$ 이며,

$$A_i := \begin{bmatrix} A_{G_i} & B_{G_i} C_{K_i} \\ 0 & A_{K_i} \end{bmatrix}, B_i := \begin{bmatrix} B_{G_i} D_{K_i} \\ B_{K_i} \end{bmatrix}, C_i := [C_{G_i} \ 0]$$

와 같이 정의된다. 이러한 상황에서 다개체 시스템의 출력 일치 문제에 대해 다음과 같은 결과가 알려져 있다.

정리 1 [21]: 행렬 쌍  $(A_i, C_i)$ 가 검출 가능하다고 가정하자. 출력 일치 문제가 풀렸다면, (a) 방향성 그래프  $\mathbb{G} = (\mathbb{N}, \mathbb{E}, \mathbb{A})$ 는 연결되어 있고, (b) 모든  $i \in \mathbb{N}$ 에 대해 행렬들  $S \in \mathbb{R}^{s \times s}$ ,  $R \in \mathbb{R}^{q \times s}$ 와 최대 열 행렬계수(full column rank)를 가지는 행렬  $\Pi_i \in \mathbb{R}^{(n_i + m_i) \times s}$ 이 존재해서 다음을 만족한다.

$$\begin{aligned} A_i \Pi_i &= \Pi_i S, \\ C_i \Pi_i &= R, \end{aligned} \quad i = 1, \dots, N. \quad (4)$$

여기서 행렬쌍  $(S, R)$ 은 관측 가능(observable)하고, 행렬  $S$ 의 모든 고유치는 닫힌 복소 우반 평면(closed right-half complex plane)에 놓인다. ■

위 정리에서 행렬 쌍  $(A_i, C_i)$ 의 검출 가능성은 사실 가정이 아니다. 만약 이 조건이 특정 개체  $i \in \mathbb{N}$ 에서 만족되지 않는다면, 행렬 쌍  $(A_i, C_i)$ 을 검출 가능 부분과 검출 불가능한 부분으로 나눈 후, 검출 가능한 부분만을 이용하여 진행하면 된다. 자세한 내용은 논문 [21]을 참고하라.

출력 일치 문제가 풀렸다면, 식 (3)에서  $z_i \equiv 0$ 이 되어 각 개체가 개루프 시스템이 된다. 따라서 정리 1에서 식 (4)가 의미하는 바는, 각 개루프 시스템에 대해 불변 다양체(invariant manifold)  $x_i = \Pi_i w$ 가 존재해서 그 다양체 위에서 출발한 시스템 해  $x_i(t)$ 는 그 다양체를 벗어나지 못하며  $(A_i \Pi_i = \Pi_i S)$ , 그 다양체 위에서의 시스템 출력  $y_i(t)$ 는 모두 같다( $C_i \Pi_i = R$ )는 것을 말한다. 여기서  $w$ 의 동역학은  $\dot{w} = Sw$ 와 그 출력  $\phi = Rw$ 로 주어진다. (여기에서 말하는 바가 소위 말하는 내부 모델 원리이다. 자세한 내용은 [1,6,21]을 참고한다.) 간략히 말하면, 모든 행렬  $A_i$ 들이 내부에 똑같은 모드  $S$ 를 포함하고 있으며, 그 모드에 의해 파생되는 출력값들은 모두 같아야 된다는 것을 의미한다.

### 2. 출력 일치 제어기 설계

앞에서 언급한 출력 일치 문제를 다루기 위해, 다음과 같은 가정을 한다.

가정 1: (a) 방향성 그래프  $\mathbb{G} = (\mathbb{N}, \mathbb{E}, \mathbb{A})$ 는 연결되어 있다. (b)  $N$ 개의 시스템들 (1)의 전달 행렬  $G_i(s) = C_{G_i}(sI - A_{G_i})^{-1}B_{G_i}$ 는 모두 같다. 즉, 모든  $i \in \mathbb{N}$ 에 대해

$G_i(s) = G(s)$ 가 되는 전달 행렬  $G(s)$ 가 존재한다. □

위 가정은 이중 다개체 시스템 출력 일치 문제의 필요 조건(정리 1)으로부터 도출된 것이다. 특히, 가정 1(b)가 만족된다면, 모든 행렬  $A_i$ 들이 항상 공통된 모드를 가진다는 것을 알 수 있다.

가정 2: 행렬  $A_G \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B_G \in \mathbb{R}^{n \times p}$ ,  $C_G \in \mathbb{R}^{q \times n}$ 들을 가정 1의 전달 행렬  $G(s)$ 의 최소 차원 구현(minimal realization)이라 하자. 즉,  $G(s) = C_G(sI - A_G)^{-1}B_G$ 이고,  $(A_G, B_G, C_G)$ 는 제어 가능(controllable), 관측 가능하다. 그러면 모든  $\lambda_i(L) \neq 0$ 에 대해  $\bar{A} - \lambda_i(L)\bar{B}\bar{C}$ 를 안정한 행렬(Hurwitz)이 되도록 하는 행렬들  $A_K \in \mathbb{R}^{m \times m}$ ,  $B_K \in \mathbb{R}^{m \times q}$ ,  $C_K \in \mathbb{R}^{p \times m}$ ,  $D_K \in \mathbb{R}^{p \times q}$ 가 존재한다. 여기서

$$\bar{A} := \begin{bmatrix} A_G & B_G C_K \\ 0 & A_K \end{bmatrix}, \bar{B} := \begin{bmatrix} B_G D_K \\ B_K \end{bmatrix}, \bar{C} := [C_G \ 0], \quad (5)$$

이고  $L$ 은 네트워크 연결 관계  $\mathbb{G}$ 의 라플라시안 행렬이다. □

주목 1: 가정 2는 주어진 라플라시안 행렬  $L$ 과 동종 다개체 시스템

$$\begin{aligned} \dot{X}_{Gi} &= A_G X_{Gi} + B_G U_i, \\ Y_i &= C_G X_{Gi} \end{aligned}$$

에 대하여 다음과 같은 동적 제어기

$$\begin{aligned} \dot{X}_{Ki} &= A_K X_{Ki} + B_K Z_i, \\ U_i &= C_K X_{Ki} + D_K Z_i, \\ Z_i &= \sum_{j \in \mathbb{N}_i} \alpha_{ij} (Y_j - Y_i) = - \sum_{j \in \mathbb{N}} l_{ij} Y_j \end{aligned} \quad (6)$$

가 상태변수 일치 문제를 푼다는 것을 의미한다. 즉,  $X_i := \text{col}(X_{Gi}, X_{Ki})$ 를 정의 한다면, 모든  $i, j \in \mathbb{N}$ 에 대하여  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|X_i(t) - X_j(t)\| = 0$ 을 만족한다[5,8,16,19]. 반면 본 논문에서는 이중 다개체 시스템의 출력 일치 문제를 다룬다는 점에 유의하라. □

가정 2를 만족하는 행렬들  $A_K, B_K, C_K, D_K$ 에 대해서는 이미 많은 연구가 진행되었다[5,7,13,16-20]. 특히 [18]에서는,  $C_G = I_n$ 일 경우에 대하여 일반적인 해를 제공한다. 또한 [16]에서는, 행렬  $A_G$ 의 모든 고유치들이 닫힌 좌반 평면에 있을 경우의 해를 제공한다.

정리 2: 가정 1과 2가 만족되면, 다음의 제어기

$$\begin{aligned} \dot{x}_{Ki} &= A_K x_{Ki} + B_K z_i, \\ u_i &= C_K x_{Ki} + D_K z_i, \\ z_i &= \sum_{j \in \mathbb{N}_i} \alpha_{ij} (y_j - y_i) = - \sum_{j \in \mathbb{N}} l_{ij} y_j \end{aligned} \quad (7)$$

는 다개체 시스템 (1)의 출력을 일치시킨다. 더욱이,  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|y_i(t) - \bar{C}e^{\bar{A}t}\xi_0\| = 0, \forall i \in \mathbb{N}$ 을 만족시키는 벡터  $\xi_0 \in \mathbb{R}^{n+m}$ 가 존재한다. 여기서  $\bar{C}$ 와  $\bar{A}$ 는 식 (5)에 정의되어 있다. ■

위 정리의 제어기 (7)과 달리, 주목 1의 (6)은 구현가능하지 않다는 사실에 유의하라. 이는  $j \in \mathbb{N}_i$ 일 때,  $i$ 번째 개체의 제어기가 출력정보  $y_j$ 는 사용할 수 있는 반면,  $Y_j$ 는 실제로

사용할 수 없기 때문이다.

증명: 일반성을 잃지 않고, 시스템 (1)의 상태 방정식이 다음과 같이 표현된다고 가정하자.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_{Gi}^{\text{oo}} \\ \dot{x}_{Gi}^{\text{co}} \\ \dot{x}_{Gi}^{\text{coo}} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_G^{\text{oo}} & 0 & A_G^{13} & 0 \\ A_G^{21} & A_G^{\text{co}} & A_G^{23} & A_G^{24} \\ 0 & 0 & A_G^{\text{coo}} & 0 \\ 0 & 0 & A_G^{43} & A_G^{\text{coo}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{Gi}^{\text{oo}} \\ x_{Gi}^{\text{co}} \\ x_{Gi}^{\text{coo}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_G^{\text{oo}} \\ B_G^{\text{co}} \\ 0 \end{bmatrix} u_i, \quad (8) \\ y_i &= [C_G^{\text{oo}} \ 0 \ C_G^{\text{co}} \ 0] x_{Gi}. \end{aligned}$$

여기서  $x_{Gi} := \text{col}(x_{Gi}^{\text{oo}}, x_{Gi}^{\text{co}}, x_{Gi}^{\text{coo}}, x_{Gi}^{\text{coo}})$ 이다. 이는 칼만 정규 분해(Kalman canonical decomposition, [3, 정리 6.7])로 인해 항상 가능하다. 칼만 정규 분해에 따르면  $G_i(s) = C_{Gi}(sI - A_{Gi})^{-1}B_{Gi} = C_{Gi}^{\text{oo}}(sI - A_{Gi}^{\text{oo}})^{-1}B_{Gi}^{\text{oo}}$  이고,  $(A_{Gi}^{\text{oo}}, B_{Gi}^{\text{oo}}, C_{Gi}^{\text{oo}})$ 는 제어가능, 관측가능하다. 더욱이 시스템의 안정화 가능성으로 인하여 행렬들  $A_G^{\text{co}}$ 와  $A_G^{\text{coo}}$ 는 안정한 행렬이다. 가정 1.(b)에 의해  $G_i(s) = G(s)$ 이고, 순서쌍  $(A_{Gi}^{\text{oo}}, B_{Gi}^{\text{oo}}, C_{Gi}^{\text{oo}})$ 는 전달 행렬  $G(s)$ 의 최소 차원 구현이라는 점에 유의하라.

모든 최소 차원 구현들의 등가성(equivalence)과 가정 2에 의해서,  $T_i^{-1}A_{Gi}^{\text{oo}}T_i = A_G, T_i^{-1}B_{Gi}^{\text{oo}} = B_G, C_{Gi}^{\text{oo}}T_i = C_G$ 를 만족하는 가역행렬(invertible matrix)  $T_i, i = 1, \dots, N$ 가 존재한다. 따라서 좌표 변환  $\tilde{x}_{Gi} := \text{diag}(T_i^{-1}, I, I, I)x_{Gi}$ 에 의해 상태 방정식 (8)이 다음과 같이 변환된다.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{\tilde{x}}_{Gi}^{\text{oo}} \\ \dot{\tilde{x}}_{Gi}^{\text{co}} \\ \dot{\tilde{x}}_{Gi}^{\text{coo}} \\ \dot{\tilde{x}}_{Gi}^{\text{coo}} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_G & 0 & T_i^{-1}A_G^{13} & 0 \\ A_G^{21}T_i & A_G^{\text{co}} & A_G^{23} & A_G^{24} \\ 0 & 0 & A_G^{\text{coo}} & 0 \\ 0 & 0 & A_G^{43} & A_G^{\text{coo}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_{Gi}^{\text{oo}} \\ \tilde{x}_{Gi}^{\text{co}} \\ \tilde{x}_{Gi}^{\text{coo}} \\ \tilde{x}_{Gi}^{\text{coo}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_G \\ B_G^{\text{co}} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u_i \quad (9) \\ y_i &= [C_G \ 0 \ C_G^{\text{co}} \ 0] \tilde{x}_{Gi}. \end{aligned}$$

여기서  $\tilde{x}_{Gi} := \text{col}(\tilde{x}_{Gi}^{\text{oo}}, \tilde{x}_{Gi}^{\text{co}}, \tilde{x}_{Gi}^{\text{coo}}, \tilde{x}_{Gi}^{\text{coo}})$ 이고, 이 상태 공간에서는  $z_i = - \sum_{j \in \mathbb{N}_i} l_{ij} y_j = - \sum_{j \in \mathbb{N}} l_{ij} C_G \tilde{x}_{Gj}^{\text{oo}} - \sum_{j \in \mathbb{N}} l_{ij} C_G^{\text{co}} \tilde{x}_{Gj}^{\text{co}}$ 가 되는 사실에 유의하라.

동적 제어기 (7)을 고려하여 상태 변수들  $\tilde{x}^{\text{co}} := \text{col}(\tilde{x}_{G1}^{\text{co}}, \dots, \tilde{x}_{GN}^{\text{co}})$ 와  $\tilde{x}_i := \text{col}(\tilde{x}_{Gi}^{\text{oo}}, x_{Ki})$ 를 정의하면, 그에 대한 동역학은 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}}_i &= \begin{bmatrix} A_G & B_G C_K \\ 0 & A_K \end{bmatrix} \tilde{x}_i + \begin{bmatrix} B_G D_K \\ B_K \end{bmatrix} z_i + \begin{bmatrix} T_i^{-1} A_G^{13} \\ 0 \end{bmatrix} \tilde{x}_{Gi}^{\text{coo}} \\ &= \begin{bmatrix} A_G & B_G C_K \\ 0 & A_K \end{bmatrix} \tilde{x}_i - \begin{bmatrix} B_G D_K \\ B_K \end{bmatrix} \sum_{j \in \mathbb{N}} l_{ij} [C_G \ 0] \tilde{x}_j \\ &\quad + \left( \begin{bmatrix} T_i^{-1} A_G^{13} \\ 0 \end{bmatrix} \tilde{x}_{Gi}^{\text{coo}} - \begin{bmatrix} B_G D_K \\ B_K \end{bmatrix} \sum_{j \in \mathbb{N}} l_{ij} C_G^{\text{co}} \tilde{x}_{Gj}^{\text{co}} \right) \\ &= \bar{A} \tilde{x}_i - \sum_{j \in \mathbb{N}} l_{ij} \bar{B} \bar{C} \tilde{x}_j + \bar{H}_i \tilde{x}^{\text{co}} \end{aligned}$$

여기서  $\bar{H}_i$ 는 위 수식들로부터 적절히 정의되며, 행렬들  $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}$ 는 식 (5)에서 이미 정의되었다. 위 식으로부터

$\tilde{x} := \text{col}(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_N)$ 와  $\tilde{x}^{\text{co}}$ 의 동역학을 다음과 같이 얻는다.

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}} &= (I_N \otimes \bar{A} - L \otimes \bar{B} \bar{C}) \tilde{x} + \bar{H} \tilde{x}^{\text{co}} \\ \tilde{x}^{\text{co}} &= A^{\text{co}} \tilde{x}^{\text{co}} := \begin{bmatrix} A_{G1}^{\text{co}} & & \\ & \ddots & \\ & & A_{GN}^{\text{co}} \end{bmatrix} \tilde{x}^{\text{co}}. \end{aligned} \quad (10)$$

여기서  $\bar{H} := \text{col}(\bar{H}_1, \dots, \bar{H}_N)$ 이고, 행렬  $A^{\text{co}}$ 는 시스템의 안정화 가능성으로 인하여 안정한 행렬이다. 또한  $\otimes$ 는 크로네커 곱(Kronecker product)을 나타낸다.

식 (10)의 점근적 특성(asymptotic behavior)을 조사하기에 앞서, 라플라시안 행렬의 조던 형태(Jordan form)  $\Phi^{-1}L\Phi = \Lambda$ 를 고려해 보자. 여기서  $\Phi$ 는 가역행렬이고,  $\Lambda$ 는  $L$ 의 조던 형태이다. 가정 1.(a)에 의해서, 일반성을 잃지 않고 행렬들  $\Phi$ 와  $\Lambda$ 가 다음과 같은 형태라 할 수 있다.

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \Lambda_1 \end{bmatrix}, \quad \Phi = [1_N \ \Phi_1], \quad \Phi^{-1} = \begin{bmatrix} r^T \\ \Phi_2 \end{bmatrix}.$$

여기서 상삼각(upper triangular) 행렬  $\Lambda_1 \in \mathbb{C}^{(N-1) \times (N-1)}$ 의 대각성분은 라플라시안 행렬  $L$ 의 0이 아닌 고유치들로 구성되며,  $r^T \in \mathbb{R}^{1 \times N}$ 는 라플라시안 행렬의 고유치 0에 대응되는 좌 고유벡터이다.

라플라시안 행렬의 조던 형태를 이용하여 좌표 변환  $\xi := (\Phi^{-1} \otimes I_{n+m}) \tilde{x}$ 을 수행하면,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{\xi}_1 \\ \dot{\xi}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \bar{A} & 0 \\ 0 & I_{N-1} \otimes \bar{A} - \Lambda_1 \otimes \bar{B} \bar{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} + (\Phi^{-1} \otimes I) \bar{H} \tilde{x}^{\text{co}} \\ \tilde{x}^{\text{co}} &= A^{\text{co}} \tilde{x}^{\text{co}} \end{aligned}$$

을 얻는다. 여기서  $\xi := \text{col}(\xi_1, \xi_2)$ ,  $\xi_1 \in \mathbb{R}^{n+m}$ , 그리고  $\xi_2 \in \mathbb{R}^{(N-1)(n+m)}$ 이다. 위 동역학과 안정한 행렬  $A^{\text{co}}$ 로부터  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\tilde{x}^{\text{co}}(t)\| = 0$ 이란 사실을 알 수 있다. 또한 가정 2에 의해서  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\xi_2(t)\| = 0$ 이 성립한다. 이는 0으로 수렴하는 입력으로 구동되는 안정한 선형 시스템의 특성에 기인한다. 마지막으로, 부록의 보조 정리 1에 의해  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\xi_1(t) - e^{\bar{A}t} \xi_0\| = 0$ 을 만족하는 벡터  $\xi_0 \in \mathbb{R}^{n+m}$ 이 존재한다는 것을 알 수 있다.

앞에서 구한  $\xi_1$ 과  $\xi_2$ 의 점근적 특성으로 인해, 우리는 상태변수  $\tilde{x}$ 의 점근적 특성을 아래와 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \|\tilde{x}(t) - (1_N \otimes e^{\bar{A}t}) \xi_0\| &= \lim_{t \rightarrow \infty} \|(\Phi \otimes I_{n+m}) \xi(t) - (1_N \otimes e^{\bar{A}t}) \xi_0\| \\ &\leq c \lim_{t \rightarrow \infty} \|\xi(t) - (\Phi^{-1} 1_N \otimes e^{\bar{A}t}) \xi_0\| \\ &= c \lim_{t \rightarrow \infty} \left\| \begin{bmatrix} \xi_1(t) \\ \xi_2(t) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} e^{\bar{A}t} \xi_0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\| = 0. \end{aligned}$$

여기서  $c = \|\Phi \otimes I_{n+m}\|$ 이다. 따라서  $\tilde{x}^{\text{co}}$ 와  $\tilde{x}$ 의 점근적 특성과 식 (9)로 인하여, 아래와 같이 출력 일치가 된다는 것을 보일 수 있다.

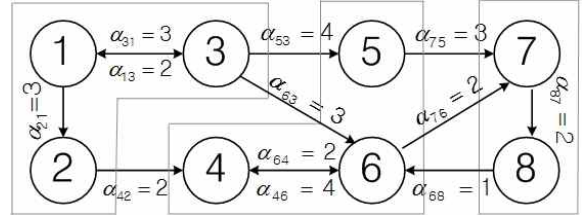


그림 1. 8개의 개체로 구성된 다개체 시스템의 정보흐름을 묘사하는 네트워크 연결 관계. 원안의 숫자는 각 개체 식별번호를,  $\alpha_{ij}$ 는 통신의 가중치를 의미한다. 주어진 토폴로지는 노드 1 또는 3을 루트로 갖는 연결된 그래프이다.

Fig. 1. A network topology describing the local interaction among the 8 agents. The number in each circle denotes the identifier of each agent, and  $\alpha_{ij}$  the interaction strength. Note that the topology is connected and its corresponding root nodes are agents 1 and 3.

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \|y_i(t) - \bar{C} e^{\bar{A}t} \xi_0\| &= \lim_{t \rightarrow \infty} \|C_G \tilde{x}_G^{\text{co}}(t) + C_G^{\text{co}} \tilde{x}_G^{\text{co}}(t) - \bar{C} e^{\bar{A}t} \xi_0\| \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \|\bar{C}(\tilde{x}_i(t) - e^{\bar{A}t} \xi_0) + C_G^{\text{co}} \tilde{x}_G^{\text{co}}(t)\| = 0. \end{aligned}$$

정리 2의 증명을 통해서, 출력 일치 궤적에 실질적으로 관여하는 동역학은 시스템의 제어가능, 관측가능한 부분이란 사실을 알 수 있다. 즉 식 (8)의 상태변수  $x_G^{\text{co}}$ ,  $i=1, \dots, N$ 들에 해당하는 동역학에 의해 결정된다. 가정 2에 비추어 보았을 때, 행렬  $A_G$ 와  $C_G$ 에 의하여 출력 일치 궤적의 파형이 결정된다고도 할 수 있다. 반면, 시스템 출력에 나타나는 제어 불가능한 부분은 안정하므로 0으로 수렴하여 출력 일치 궤적에 영향을 미치지 않는다.

### III. 예제

다음과 같은 행렬들을 시스템 행렬로 가지는 8개의 선형 이중 시스템들을 고려하자.

$$\begin{aligned} A_G &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, & B_G &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, & C_G &= [20], \\ A_{Gj} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -4 \end{bmatrix}, & B_{Gj} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, & C_{Gj} &= [200], \\ A_{Gk} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 0 & 15 \\ 2 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}, & B_{Gk} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, & C_{Gk} &= [2003]. \end{aligned}$$

여기서  $i=1, 2, 3$ ,  $j=4, 5, 6$ ,  $k=7, 8$ 이다. 이 시불변 단일 입출력(SISO) 시스템들은 동일한 전달함수  $G(s) = 2/(s^2 + 1)$ 를 갖는다는 점에 유의하라. 그리고 행렬들  $A_G = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $B_G = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ,  $C_G = [20]$ 가 전달함수  $G(s)$ 의 최소 차원 구현이 된다는 점 역시 유념하라. 이 다개체 시스템을 구성하는

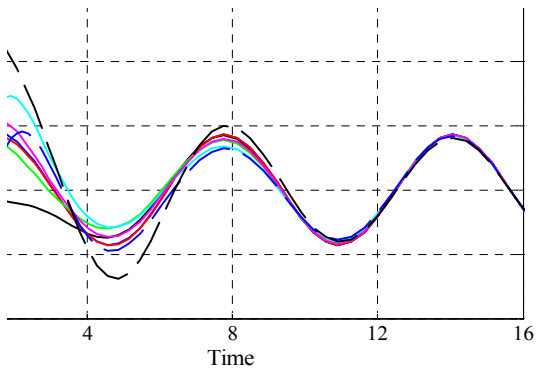


그림 2. 모의 실험 결과. 편의상 개체식별번호는 생략하였으며, 시간에 따른 각 개체의 출력 궤적만 도시화하였다.

Fig. 2. Simulation result. For brevity, the agents' identifiers are omitted and only the output trajectories are plotted.

8개의 이중 시스템들이 네트워크를 통해 그림 1과 같이 정보를 교환한다고 하자.

위와 같은 상황에서의 출력 일치 문제를 풀기 위하여 제어기 행렬들  $A_K, B_K, C_K, D_K$ 를 다음과 같이 설계한다.

$$\begin{aligned} A_K &= A_G + KC_G - B_G B_G^T P(\varepsilon), & B_K &= -K, \\ C_K &= B_G^T P(\varepsilon), & D_K &= 0. \end{aligned} \quad (11)$$

여기에서 행렬  $K$ 는  $A_G + KC_G$ 가 안정한 행렬이 되도록 설계하고, 행렬  $P^T(\varepsilon) = P(\varepsilon) > 0$ 는  $A_G^T P + P A_G - \min_{i \neq 1} \text{Re}(\lambda_i(L)) P B_G B_G^T P + \varepsilon I = 0$ 의 유일한 해이다. 이 제어기가 충분히 작은  $\varepsilon > 0$ 에 대하여 가정 2를 만족하는 것이 알려져 있다[16].

그림 2는 제어기 행렬들 (11)을 이용하여 수행한 모의 실험 결과이다. 이 모의 실험에서 행렬  $A_G + KC_G$ 의 고유치가  $-7, -8$ 이 되도록 행렬  $K = \begin{bmatrix} -7.5 \\ -27.5 \end{bmatrix}$ 로 설계하였으며,  $\varepsilon = 0.1$ 로 선택했다. 주어진 네트워크 연결 관계로부터 유도되는 라플라시안 행렬  $L$ 과  $\varepsilon$ 으로 부터  $P = \begin{bmatrix} 0.3424 & 0.0477 \\ -0.0477 & 0.3126 \end{bmatrix}$  역시 구할 수 있다. 각 개체와 제어기의 모든 초기값은  $[-50, 50]$ 에 속하는 임의의 값으로 설정되었다.

그림 2로부터 제안된 제어기에 의해 이중 다개체 시스템의 출력 일치가 이루어진 것을 확인할 수 있다. 즉, 시간이 지남에 따라 각 개체의 출력은 시스템 행렬에 존재 하는 동일한 모드에 의해 생성되는 1rad/sec의 주파수를 갖는 사인 궤적으로 수렴해간다.

#### IV. 결론

본 논문에서는 안정화 가능한 선형 이중 다개체 시스템의 출력 일치 문제를 다루었다. 개체들 간의 네트워크 통신은 방향성 그래프로 묘사되는 통신 관계가 고려 대상이다. 개체들 간에 공통된 모드가 있어야 된다는 이중 다개체 시스템 출력 일치 문제의 필요 조건에 의거하여, 공통된 모드를 제어기에 인위적으로 삽입해 넣는 기존 기법들(가령 [9]

과 [22])과는 달리, 본 논문에서는 각 개체들이 동일한 전달 행렬을 가지는 경우의 해법을 제시하였다. 그러므로 이 결과는 (전달 행렬이 굳이 같지 않더라도) 각 개체들이 특정 공통 모드를 갖는 경우, 그 이중 다개체 시스템이 출력 일치를 이루도록 하는 제어기를 개발해내기 위한 시발점으로 서 그 기여도가 있다고 할 수 있다.

본 논문의 결과를 기초로 하여, 더 일반적인 이중 다개체 시스템의 출력 일치 문제에 대한 해법을 연구할 수 있을 것이다. 가령 단일 입출력 시스템의 경우, 각 개체들의 전달함수의 분모는 모두 같지만, 그 분자는 각기 다를 경우에 대한 출력 일치 문제를 다루는 것 또한 의미있는 일이라 할 수 있겠다.

#### 부록

지수적으로 감쇠하는 입력에 대한 선형 시스템의 점근적 성질을 알아보기 위해 다음과 같은 형태의 시스템을 고려하자.

$$\dot{x} = Ax + u, \quad x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m. \quad (A.1)$$

여기서 행렬  $A$ 에 아무런 제약 조건이 부과되지 않았다는 점을 유의하라. 즉, 행렬  $A$ 의 고유치는 복소 평면 어디에 든 놓일 수 있다.

보조정리 1 [20, 보조정리 B.1]: 시스템 (A.1)에 인가되는 입력이 모든  $t \geq 0$ 에 대하여  $\|u(t)\| \leq a_1 e^{-\nu_1 t}$ 를 만족한다고 하자. 여기서  $a_1$ 과  $\nu_1$ 은 양수이다. 또한  $x(t)$ 를 그 입력에 대한 시스템 (A.1)의 해라고 하자. 그러면 양수  $a_2$ 와  $\nu_2$ , 상수 벡터  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ 가 존재해서 다음을 만족한다.

$$\|x(t) - e^{At} x_0\| \leq a_2 e^{-\nu_2 t}, \quad \forall t \geq 0. \quad \blacksquare$$

위 보조정리에서 일반적으로  $x_0 \neq x(0)$ 일 수 있다는 점에 주의하라.

#### 참고문헌

- [1] C. I. Byrnes, F. D. Priscoli, and A. Isidori, *Output Regulation of Uncertain Nonlinear Systems*, Birkhäuser, 1997.
- [2] J. S. Caughman, G. Lafferriere, J. J. P. Veerman, and A. Williams, "Decentralized control of vehicle formations," *Systems and Control Letters*, vol. 54, no. 9, pp. 899-910, Sep. 2005.
- [3] C.-T. Chen, *Linear System Theory and Design*, 3rd Ed., Oxford University Press, 1999.
- [4] F. Cucker and S. Smale, "Emergent behavior in flocks," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 52, no. 5, pp. 852-862, May 2007.
- [5] J. A. Fax and R. M. Murray, "Information flow and cooperative control of vehicle formations," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 49, no. 9, pp. 1465-1476, Sep. 2004.
- [6] B. A. Francis and W. M. Wonham, "The internal model

- principle of control theory,” *Automatica*, vol. 12, no. 5, pp. 457-465, Sep. 1976.
- [7] H. Kim, S. Kim, H. Shim, and J. Back, “Order reduction paradigm for consensus of neutrally stable multi-agent systems,” *Journal of Institute of Control, Robotics, and Systems (in Korean)*, vol. 16, no. 3, pp. 222-226, Mar. 2010.
- [8] H. Kim, H. Shim, J. Back, and J. H. Seo, “Consensus of multi-agent systems under periodic time-varying network,” *Proc. of the 8th IFAC Symposium on Nonlinear Control Systems*, pp. 155-160, Sep. 2010.
- [9] H. Kim, H. Shim, and J. H. Seo, “Output consensus of heterogeneous uncertain linear multi-agent systems,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 56, no. 1, pp. 200-206, Jan. 2011.
- [10] J. Kim, H. Kim, H. Shim, and J. Back, “Output consensus of heterogeneous linear multi-agent systems having the same transfer matrix,” *Proc. of the 26th ICROS Annual Conference*, pp. 575-576, May 2011.
- [11] R. Olfati-Saber and J. S. Shamma, “Consensus filters for sensor networks and distributed sensor fusion,” *Proc. of the 44th IEEE Conference on Decision Control and European Control Conference*, pp. 6698-6703, Dec. 2005.
- [12] B. S. Park and J. B. Park, “Leader-following based adaptive formation control for multiple mobile robots,” *Journal of Institute of Control, Robotics, and Systems (in Korean)*, vol. 16, no. 5, pp. 428-432, May 2010.
- [13] W. Ren, R. W. Beard, and E. M. Atkins, “Information consensus in multivehicle cooperative control: collective group behavior through local interaction,” *IEEE Control Systems Magazine*, vol. 27, no. 2, pp. 71-82, Apr. 2007.
- [14] C. W. Reynolds, “Flocks, herds, and schools: a distributed behavioral model,” *Computer Graphics*, vol. 21, no. 4, pp. 25-34, Jul. 1987.
- [15] L. Scardovi and R. Sepulchre, “Synchronization in networks of identical linear systems,” *Automatica*, vol. 45, no. 11, pp. 2557-2562, Nov. 2009.
- [16] J. H. Seo, H. Shim, and J. Back, “Consensus of high-order linear systems using dynamic output feedback compensator: low gain approach,” *Automatica*, vol. 45, no. 11, pp. 2659-2664, Nov. 2009.
- [17] J. H. Seo, H. Shim, and J. Back, “Reduced-order consensus controllers for output-coupled SISO linear systems,” *International Journal of Control, Automation, and Systems*, vol. 8, no. 6, pp. 1356-1363, Dec. 2010.
- [18] S. E. Tuna, “LQR-based coupling gain for synchronization of linear systems,” arXiv:0801.3390v1[math.OC] <http://arxiv.org/abs/0801.3390>, Feb. 2008.
- [19] D. Vengertsev, H. Kim, H. Shim, and J. H. Seo, “Consensus of output-coupled linear multi-agent systems under frequently connected network,” *Proc. of the 49th IEEE Conference on Decision and Control*, pp. 4559-4564, Dec. 2010.
- [20] P. Wieland, “From Static to Dynamic Couplings in Consensus and Synchronization Among Identical and Non-Identical Systems,” Ph.D. Dissertation, Institute for Systems Theory and Automatic Control, University of Stuttgart, Germany, 2011.
- [21] P. Wieland and F. Allgöwer, “An internal model principle for consensus in heterogeneous linear multi-agent systems,” *Proc. of the 1st IFAC Workshop on Estimation and Control of Networked Systems*, pp. 7-12, Sep. 2009.
- [22] P. Wieland, R. Sepulchre, and F. Allgöwer, “An internal model is necessary and sufficient for linear output synchronization,” *Automatica*, vol. 47, no. 5, pp. 1068-1074, May 2011.



김 지 수

2010년 서울대 전기공학부 졸업. 2010년~현재 동 대학교 석사과정. 관심분야는 다개체 시스템.



김 흥 근

2005년 한양대 전기전자컴퓨터공학부 졸업. 2005년~현재 서울대학교 전기공학부 석·박사통합과정. 관심분야는 다개체 시스템, 출력제어.



심 형 보

1993년 서울대 전기공학과 졸업. 1995년 동 대학교 석사. 2000년 동 대학교 박사. 2003년~현재 서울대학교 전기공학부 교수. 관심분야는 하이브리드 시스템, 다개체 시스템, 바이오 시스템.



백 주 훈

1997년 서울대 기계설계학과 졸업. 1999년 동 대학교 석사. 2004년 동 대학교 전기공학부 박사. 2007년~2008년 고려대학교 기계공학부 연구교수. 2008년~현재 광운대학교 로봇학부 조교수. 관심분야는 다개체 시스템, 풍력 발전 제어시스템, 비선형 제어.