

# 회전벡터와 좌표변환

■ 이 형근

(한국항공대학교 항공전자및정보통신공학부)

## I. 서론

공간에서 움직이는 물체의 운동을 추정하고, 수치화하고, 제어하기 위해서는 벡터, 좌표계, 좌표값, 그리고 좌표변환렬에 대한 이해가 필수적이다. 이와 관련하여 앞선 고[1]에서는 (막대) 벡터를 공간에 표시된 화살표로 이해하고, 좌표계는 단위 길이를 가지며 서로 직교하는 세개의 기저벡터로 정의되며, 벡터의 좌표값은 기저벡터의 연장선에 투영된 (막대) 벡터의 눈금값을 읽은 것으로 이해하며, 좌표변환행렬은 서로 다른 두 좌표계에 대하여 표현된 동일 (막대) 벡터의 두 좌표값 사이의 관계를 기술하여 주는 행렬이라고 정리하였다.

두 좌표계 사이의 관계를 설명하는 좌표변환행렬은 이론적인 설명이 간결하지만 두 좌표계의 3차원 회전 관계[1,2]를 기술하기 위하여 9개의 변수를 활용해야 하므로 실용적인 계산 관점에서 부담스러운 면이 있다. 이와 같은 계산 부담을 줄이기 위하여 활용할 수 있는 표현법으로는 4개의 변수를 활용하는 쿼터니언(quaternion)과 3개의 변수를 활용하는 회전벡터(rotation vector)를 들 수 있다.

본 고에서는 이들 중 이론적으로 최소한의 변수를 활용하는 회전벡터와 좌표변환행렬 사이의 관계에 대하여 살펴보기로 한다. 회전벡터는 두 좌표계 사이의 변환 관계를 한 개의 고유축(eigen axis)을 활용하는 단 한번의 회전으로 설명하는 오일러의 회전 법칙(Euler's rotation theorem)에 가장 밀접한 관계를 가지며 이에 덧붙여 쿼터니언의 정의에 활용되는 중요한 변

수에 해당된다.

## II. 오일러의 회전 법칙과 고유축

본 절에서는 오일러의 회전 법칙과 고유축에 대하여 간략히 살펴보고자 한다. 이를 위하여 고정된 기준 좌표계에 해당되는  $i$ -좌표계와 회전 운동하는 임의의  $m$ -좌표계를 고려하기로 한다. 두 좌표계는 각각 다음과 같은 단위 기저벡터들로 정의된다.

$i$ -좌표계의 기저벡터:  $\{I_i, J_i, K_i\}$

$m$ -좌표계의 기저벡터:  $\{I_m, J_m, K_m\}$

오일러의 회전법칙은 원점  $O$ 를 공유하며 임의의 관계로 자세가 일치하지 않은 두 좌표계의 기저벡터들을 단 한번의 회전운동으로 일치시킬 수 있는 고유축  $\mathbf{n}$ 과 회전량  $\phi$ 이 반드시 존재함을 보장하며 이와 관련된 개형은 그림 1에 도시되어 있다. 그림 1에 나타난 바와 같이 고유축은  $i$ -좌표계 혹은  $m$ -좌표계 기저벡터들의 조합으로 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\mathbf{n} = [I_i \ J_i \ K_i] \mathbf{n}^i = [I_m \ J_m \ K_m] \mathbf{n}^m \quad (1)$$

여기서  $\mathbf{n}^i$ 와  $\mathbf{n}^m$ 은 고유축  $\mathbf{n}$ 의  $i$ -좌표계와  $m$ -좌표계에 대한 좌표값을 각각 나타내며, 그림 1에 나타난 대칭 기하에 의하여 다음의 관계식들을 만족하게 된다.

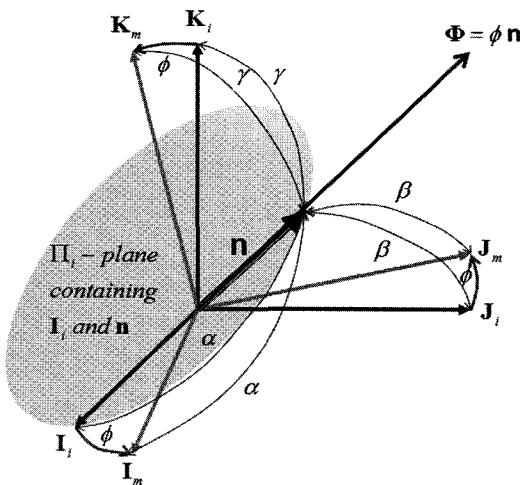


그림 1. 회전벡터와 두 좌표계의 기하 개형.

$$\mathbf{n}^i = \mathbf{n}^m = [e_1 \ e_2 \ e_3]^T \quad (2a)$$

$$e_1 = \cos(\alpha), \ e_2 = \cos(\beta), \ e_3 = \cos(\gamma) \quad (2b)$$

$$\mathbf{n}^i = C_m^i \mathbf{n}^m = C_m^i \mathbf{n}^i \quad (2c)$$

$$\|\mathbf{n}^i\| = \|\mathbf{n}^m\| = 1 \quad (2d)$$

여기서  $\alpha$ ,  $\beta$ , 그리고  $\gamma$ 는 고유축  $\mathbf{n}$ 과  $x$ ,  $y$ , 그리고  $z$  축 방향의 기저벡터들 사이의 각도를 각각 나타내며,  $C_m^i$ 는  $m$ -좌표계에서  $i$ -좌표계로의 좌표변환행렬을 나타낸다. (2c)는 특히 고유축의 특성을 대표하는 식으로서 고유축의 좌표값은 좌표변환행렬을 반복적으로 적용해도 변하지 않음을 나타낸다. 고유축  $\mathbf{n}$ 과 회전량  $\phi$ 에 의한 좌표변환행렬  $C_m^i$ 의 표현은 다음과 같이 상세히 다루도록 한다.

두 좌표계 사이의 관계를 한 개의 3차원 회전벡터  $\Phi$ 로 표현하기 위해서 고유축  $\mathbf{n}$ 과 회전량  $\phi$ 는 다음과 같이 결합된다.

$$\Phi = \phi \mathbf{n} \quad (3)$$

회전벡터  $\Phi$ 의 서로 다른 두 좌표계에 대한 좌표값  $\Phi^i$ 와  $\Phi^m$ 은 그림 1에 도시된 대칭 기하에 의하여 동일하며 다음과 같이 표현된다.

$$\Phi^i = \phi \mathbf{n}^i = [\phi e_1 \ \phi e_2 \ \phi e_3]^T = \phi \mathbf{n}^m = \Phi^m \quad (4)$$

여기서, 스칼라 회전량  $\phi$ 은 고유축  $\mathbf{n}$ 의 길이가 1임을 고려하여 다음과 같이 회전벡터의 좌표값으로부터 계산될 수 있다.

$$\phi = \sqrt{(\Phi^i)^T \Phi^i} = \sqrt{(\Phi^m)^T \Phi^m} \quad (5)$$

### III. 단위 회전에 대한 고찰

본 절에서는 좌표변환행렬을 회전벡터에 의하여 표현하기 위하여 선행되어야 할 몇 가지 기본적인 단위 회전을 살펴보자 한다. 이와 관련된 상세한 유도에 앞서 참고로 앞선 고[II]에서 다루었던 방법은 한 좌표계의 기저벡터들에 대하여 세 개의 연차적인 축을 기준으로 한 (yaw, pitch, roll) 회전을 적용하여 최종적으로 이들이 다른 쪽 좌표계의 기저벡터들과 일치하도록 하는 단방향적 방법을 활용하였음을 밝혀둔다.

이에 비하여 본 절에서 다루는 방법은 각기 다른 두 좌표계를 기점으로 각각 두 개의 연차적인 단위 회전들을 다음과 같이 적용한다.

(회전 i-1)  $i$ -좌표계의  $x$ 축이 고유축과 정렬 되도록 회전을 가하여  $i'$ -좌표계를 얻는다.

(회전 i-2)  $i'$ -좌표계의  $x$ 축을 기준으로  $+\phi/2$  만큼 회전을 가하여  $i''$ -좌표계를 얻는다.

(회전 m-1)  $m$ -좌표계의  $x$ 축이 고유축과 정렬 되도록 회전을 가하여  $m'$ -좌표계를 얻는다.

(회전 m-2)  $m'$ -좌표계의  $x$ 축을 기준으로  $-\phi/2$  만큼 회전을 가하여  $m''$ -좌표계를 얻는다.

여기서 (회전 i-1)은 그림 2에 도시된 바와 같이  $i'$ -좌표계의  $x$ 축 기저벡터  $\mathbf{I}'_i$ 가 고유축  $\mathbf{n}$ 과 일치하도록 가해지며, (회전 i-2)는 그림 3에 도시된 바와 같이  $\mathbf{I}'_i$ 를 중심으로  $+ \phi/2$  만큼의 크기만큼 가해진다. 유사하게 (회전 m-1)은  $m'$ -좌표계의  $x$ 축 기저벡터  $\mathbf{I}'_m$ 이 고유축  $\mathbf{n}$ 과 일치하도록 가해지며, (회전 m-2)는  $\mathbf{I}'_m$ 을 중심으로  $- \phi/2$  만큼의 크기만큼 가해진다. 그림 1에 도시된 바와 같이  $i$ -좌표계와  $m$ -좌표계에 기저벡터들이 고유축  $\mathbf{n}$ 에 대하여 서로 대칭이며 (회전 i-1)과 (회전 i-2)가 (회전 m-1)과 (회전 m-2)에 대칭인 관계로 기점이 서로 다른  $i''$ -좌표계와  $m''$ -좌표계는 서로 일치하게 된다.

(회전 i-1)과 관련된 수식을 정리하면 다음과 같다. 먼저,  $i$ -좌표계의  $x$ 축 기저벡터  $\mathbf{I}'_i$ 가 고유축  $\mathbf{n}$ 에 동일하도록 (회전 i-1)i] 적용되므로 (2a)에 의하여 다음의 관계가 성립한다.

$$(\mathbf{I}'_i)^{i'} = \mathbf{n}^i = [e_1 \ e_2 \ e_3]^T = B_i = C_{i'}^i (\mathbf{I}'_{i'})^{i'} \quad (6)$$

여기서  $B_i$ 은 기저벡터  $\mathbf{I}'_i$ 의  $i$ -좌표계에 대한 좌표값을 나타

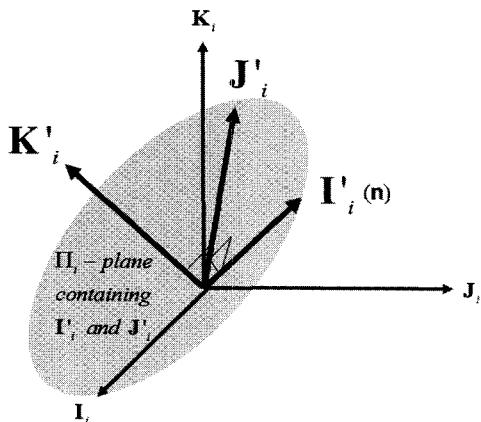


그림 2. 첫번째 단위 회전의 기하 개형.

$$\mathbf{K}'_i = \mathbf{I}'_i \times \mathbf{J}'_i \quad (8)$$

$B_1$ 의 경우와 마찬가지로  $i'$ -좌표계 기저벡터  $\mathbf{J}'_i$ 의  $i$ -좌표계에 대한 좌표값을 읽어서  $B_2$ 로 표시하면 마지막 기저벡터  $\mathbf{K}'_i$ 의 좌표값  $B_3$ 는 다음의 식에 의하여 계산할 수 있다.

$$B_3 = \langle B_1 \rangle B_2 \quad (9)$$

여기서  $3 \times 3$  행렬  $\langle B_1 \rangle$ 은  $B_1$ 을 활용하여 구성한 왜대칭행렬 (skew-symmetric matrix)을 나타낸다. 앞서 구한 좌표값  $B_1$ ,  $B_2$ , 그리고  $B_3$ 를 활용하면  $i'$ -좌표계와  $i$ -좌표계 사이의 좌표변환 관계는 다음과 같이 구해진다 [1].

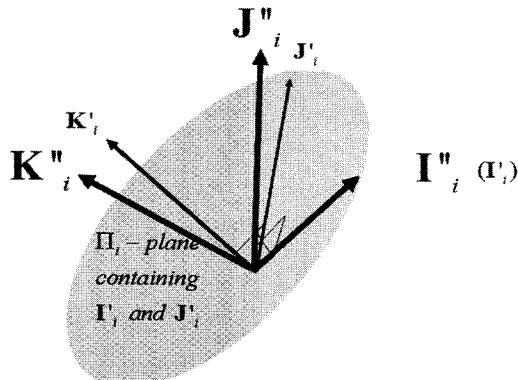


그림 3. 두번째 단위 회전의 기하 개형.

낸다.  $\mathbf{I}'_i$ 는  $i'$ -좌표계의  $x$ 축 기저벡터이므로 이의 좌표값을  $i'$ -좌표계에 대하여 표현하면 자명하게 다음의 값을 가진다.

$$(\mathbf{I}'_i)^{i'} = [1 \ 0 \ 0] \quad (7)$$

$i'$ -좌표계의 나머지  $y$ 축과  $z$ 축 기저벡터  $\mathbf{J}'_i$ 와  $\mathbf{K}'_i$ 의 방향은 다음에 설명되는 방법에 의하여 설정된다. 먼저,  $i$ -좌표계의 기저벡터  $\mathbf{I}_i$ 와 고유축  $\mathbf{n}$ 을 포함하는 평면  $\Pi_i$ 를 정의한다. 평면  $\Pi_i$ 에 포함되면서 고유축  $\mathbf{n}(\mathbf{I}'_i)$ 에 직교하는 두 단위 벡터를 찾는다. 이를 두 단위 벡터들 중에서 기저벡터  $\mathbf{J}'_i$ 에 보다 가까운 단위 벡터를  $\mathbf{J}'_i$ 로 설정한다. 나머지  $z$ 축 기저벡터  $\mathbf{K}'_i$ 는  $\mathbf{I}'_i$ 와  $\mathbf{J}'_i$ 에 직교하도록 설정한다. 이와 같이 설정된 세 가지 기저벡터는 오른손 좌표계(right-handed coordinate system)를 이루어어야 하므로 다음의 벡터 외적 관계식을 만족해야 한다.

$$C_{i'}^i = \begin{bmatrix} e_1 & b_{21} & b_{31} \\ e_2 & b_{22} & b_{32} \\ e_3 & b_{23} & b_{33} \end{bmatrix} = [B_1 : B_2 : B_3] \quad (10)$$

$$C_i = C_{i'}^{i''} = \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} = [A_1 : A_2 : A_3] \quad (10)$$

(회전 i-2)는  $i'$ -좌표계의  $x$ 축 기저벡터를 축으로 한  $+ \phi/2$  만큼의 회전을 나타내므로 다음의 관계를 만족하게 된다.

$$C_2 = C_{i'}^{i''} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\phi/2) & \sin(\phi/2) \\ 0 & -\sin(\phi/2) & \cos(\phi/2) \end{bmatrix} \quad (11)$$

(회전 m-1)은 고유축  $\mathbf{n}$ 을 기준으로 (회전 i-1)과 기하학적 대칭을 이루므로 앞서 설명된 (6), (7), (10), 그리고 (11)을 참조하면 다음의 관계식들을 얻을 수 있다.

$$(\mathbf{I}_{m'})^m = \mathbf{n}^m = [e_1 \ e_2 \ e_3]^T = B_1 = C_{m'}^m (\mathbf{I}_{m'})^{m'} \quad (12a)$$

$$(\mathbf{I}_{m'})^{m'} = [1 \ 0 \ 0] \quad (12b)$$

$$C_{m'}^m = \begin{bmatrix} e_1 & b_{21} & b_{31} \\ e_2 & b_{22} & b_{32} \\ e_3 & b_{23} & b_{33} \end{bmatrix} = [B_1 : B_2 : B_3] \quad (12c)$$

$$C_3 = C_m^{m'} = \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} = [A_1 : A_2 : A_3] \quad (12d)$$

(회전 m-2)는  $m'$ -좌표계의  $x$ 축 기저벡터를 축으로 한  $-\phi/2$  만큼의 회전을 나타내므로 다음의 관계를 만족하게 된다.

$$C_4 = C_m^{m'} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\phi/2) & -\sin(\phi/2) \\ 0 & \sin(\phi/2) & \cos(\phi/2) \end{bmatrix} \quad (13)$$

#### IV. 회전벡터에 의한 좌표변환행렬의 표현

본 절에서는 앞선 절에서 다루어진 다양한 단위 변환 관계를 활용하여 좌표변환행렬  $C_m^i$ 와 회전벡터 좌표값  $\Phi^i$  사이의 관계를 설명하고자 한다. 먼저 (10)-(13)과 고유축  $\mathbf{n}$ 을 기준으로 한  $i''$ -좌표계와  $m''$ -좌표계의 기하학적 대칭 관계에 의하여 다음의 관계식들이 자명하게 성립함을 확인할 수 있다.

$$C_3 = C_1, \quad C_4 = (C_2)^{-1} \quad (14a)$$

$$(C_2)^{-1} C_4 = C_4 C_4 = C(I, -\phi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\phi) & -\sin(\phi) \\ 0 & \sin(\phi) & \cos(\phi) \end{bmatrix} \quad (14b)$$

$$C_m^i = (C_1)^{-1} (C_2)^{-1} C_4 C_3 = (C_1)^{-1} C(I, -\phi) C_1 = (C_1)^T C(I, -\phi) C_1 \quad (14c)$$

앞선 절에서 설명된 단위 좌표변환행렬  $C_1$ 과  $C_3$ 를 구성하는 열벡터  $\{A_1, A_2, A_3\}$ 는  $i'(m')$ -좌표계 기저벡터들의  $i(m)$ -좌표계에 대한 좌표값을 나타내며  $\{B_1, B_2, B_3\}$ 는  $i(m)$ -좌표계 기저벡터들의  $i'(m')$ -좌표계에 대한 좌표값에 해당된다. 한 좌표계를 정의하는 세개의 기저벡터들은 단위 길이를 가지며 서로 직교하므로 다음의 관계를 만족해야 한다.

$$\{A_j\}: (A_j)^T A_j = 1, (A_j)^T A_k = 0, i, j = 1, 2, 3, i \neq j \quad (15a)$$

$$\langle A_1 \rangle A_2 = A_3, \langle A_2 \rangle A_3 = A_1, \langle A_3 \rangle A_1 = A_2 \quad (15b)$$

$$\{B_j\}: (B_j)^T B_j = 1, (B_j)^T B_k = 0, i, j = 1, 2, 3, i \neq j \quad (15c)$$

$$\langle B_1 \rangle B_2 = B_3, \langle B_2 \rangle B_3 = B_1, \langle B_3 \rangle B_1 = B_2 \quad (15d)$$

이에 덧붙여, 왜대칭행렬의 특성으로 인하여 각 기저벡터의 좌표값은 다음의 관계를 자명하게 만족한다.

$$\langle A_j \rangle A_j = O, \langle B_j \rangle B_j = O, j = 1, 2, 3 \quad (16)$$

(15)와 (16)에 나타나 있는 관계식들은 다음 관계식들의 유도에 활용되며 이들은 단위 좌표변환행렬  $C_m^{m'}$ 과  $C_m^m$ 의 구성요소  $\{e_1, e_2, e_3, c_{21}, c_{22}, \dots, c_{32}, c_{33}\}$ 의 값을 결정하는 제한 조건으로 편리하게 활용된다.

$$(A_1)^T A_1 = 1 \Rightarrow (e_1)^2 + (b_{21})^2 + (b_{31})^2 = 1 \quad (17)$$

$$(A_1)^T A_2 = 0 \Rightarrow b_{21}b_{22} + b_{31}b_{32} = -e_1e_2 \quad (18)$$

$$\langle B_2 \rangle B_3 = B_1 \Rightarrow b_{32}b_{21} - b_{31}b_{22} = e_3 \quad (19)$$

(10)과 (14b)를 (14c)에 대입하고 전개하면 다음의 행렬식들이 얻어진다.

$$\begin{aligned} C_m^i &= \begin{bmatrix} e_1 & b_{21} & b_{31} \\ e_2 & b_{22} & b_{32} \\ e_3 & b_{23} & b_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\phi) & -\sin(\phi) \\ 0 & \sin(\phi) & \cos(\phi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} e_1 & (b_{21}c + b_{31}s) & (b_{31}c - b_{21}s) \\ e_2 & (b_{22}c + b_{32}s) & (b_{32}c - b_{22}s) \\ e_3 & (b_{23}c + b_{33}s) & (b_{33}c - b_{23}s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} e_1^2 & e_1e_2 & e_1e_3 \\ e_2e_1 & e_2^2 & e_2e_3 \\ e_3e_1 & e_3e_2 & e_3^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1e_2 & e_1e_3 & e_2e_3 \\ e_2e_1 & e_2^2 & e_2e_3 \\ e_3e_1 & e_3e_2 & e_3^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} +b_{21}(b_{21}c + b_{31}s) & +b_{22}(b_{21}c + b_{31}s) & +b_{23}(b_{21}c + b_{31}s) \\ +b_{31}(b_{31}c - b_{21}s) & +b_{32}(b_{31}c - b_{21}s) & +b_{33}(b_{31}c - b_{21}s) \\ +b_{21}(b_{22}c + b_{32}s) & +b_{22}(b_{22}c + b_{32}s) & +b_{23}(b_{22}c + b_{32}s) \\ +b_{31}(b_{32}c - b_{22}s) & +b_{32}(b_{32}c - b_{22}s) & +b_{33}(b_{32}c - b_{22}s) \\ +b_{21}(b_{23}c + b_{33}s) & +b_{22}(b_{23}c - b_{33}s) & +b_{23}(b_{23}c - b_{33}s) \\ +b_{31}(b_{33}c - b_{23}s) & +b_{32}(b_{33}c + b_{23}s) & +b_{33}(b_{33}c + b_{23}s) \end{bmatrix} \quad (20) \end{aligned}$$

여기서

$$c = \cos(\phi), s = \sin(\phi). \quad (21)$$

(17)을 (20)에 대입하고  $C_m^i$ 의 (1,1) 구성요소에 대하여 정리하면 다음과 같이 간략화 된다.

$$C_m^i(1,1) = e_1^2 + b_{21}(b_{21}c + b_{31}s) + b_{31}(b_{31}c - b_{21}s) = c + (1-c)e_1^2 \quad (22)$$

또한 (18)과 (19)를 (20)에 대입하고  $C_m^i$ 의 (1,2) 구성요소에 대하여 정리하면 다음과 같이 간략화 된다.

$$\begin{aligned}
 C_m^i(1,2) &= e_1e_2 + b_{22}(b_{21}c + b_{31}s) + b_{32}(b_{31}c - b_{21}s) \\
 &= e_1e_2 + (b_{21}b_{22} + b_{31}b_{32})c + (b_{22}b_{31} - b_{21}b_{32})s \\
 &= e_1e_2 - e_1e_2c - e_3s \\
 &= (1-c)e_1e_2 - e_3s
 \end{aligned} \tag{23}$$

(22)와 (23)과 같은 유사한 과정을  $C_m^i$ 의 각 구성요소에 적용하고 정리하면 다음의 중간 결과식이 얻어진다.

$$C_m^i = \cos(\phi)I_{3 \times 3} + [1 - \cos(\phi)]\mathbf{n}^i(\mathbf{n}^i)^T + \sin(\phi)\langle\mathbf{n}^i\rangle \tag{24}$$

(24)를 더 전개하여 회전벡터 좌표값  $\Phi^i$ 에 의한 좌표변환행렬  $C_m^i$ 의 표현식을 얻기 위해서는 어떠한 3차원 좌표값  $a$ 와  $b$ 에 대해서도 항상 성립하는 다음의 외적/내적 관계식을 활용해야 한다.

$$\langle a \rangle \langle b \rangle = ba^T - b^T a I_{3 \times 3}, ba^T = b^T a I_{3 \times 3} + \langle a \rangle \langle b \rangle \tag{25}$$

(25)를 (24)에 대입하고 정리하면 다음과 같이 좌표변환행렬  $C_m^i$ 을 회전벡터 좌표값  $\Phi^i$ 로 표현하여 주는 최종 결과식이 얻어진다.

$$\begin{aligned}
 C_m^i &= \cos(\phi)I_{3 \times 3} + [1 - \cos(\phi)][I_{3 \times 3} + \langle \mathbf{n}^i \rangle \langle \mathbf{n}^i \rangle] + \sin(\phi)\langle \mathbf{n}^i \rangle \\
 &= I_{3 \times 3} + \sin(\phi)\langle \mathbf{n}^i \rangle + [1 - \cos(\phi)]\langle \mathbf{n}^i \rangle \langle \mathbf{n}^i \rangle \\
 &= I_{3 \times 3} + \frac{\sin(\phi)}{\phi}\langle \Phi^i \rangle + \frac{1 - \cos(\phi)}{\phi^2}\langle \Phi^i \rangle \langle \Phi^i \rangle
 \end{aligned} \tag{26}$$

이에 덧붙여, 좌표변환행렬  $C_i^m$ 은  $-\Phi^i$ 에 의한 반대방향 회전과 관련되므로 우함수(even function) 및 기함수(odd function)의 구별에 의하여 다음과 같이 얻어진다.

$$C_i^m = I_{3 \times 3} - \frac{\sin(\phi)}{\phi}\langle \Phi^i \rangle + \frac{1 - \cos(\phi)}{\phi^2}\langle \Phi^i \rangle \langle \Phi^i \rangle \tag{27}$$

지금까지는 회전벡터의 좌표값이 알려진 경우 이를 활용하여 좌표변환행렬을 구성하는 방법에 대하여 살펴 보았다. 반면, 반대의 경우로 좌표변환행렬이 알려진 경우 이를 활용하여 회전벡터의 좌표값을 구하고자 하는 경우에는 다음의 관계식을 활용한다.

$$\Phi^i = \phi \mathbf{n}^i = [\phi e_1 \quad \phi e_2 \quad \phi e_3]^T = \Phi^m \tag{28}$$

여기서

$$\phi = \cos^{-1}\left[\frac{1}{2}\left(\text{tr}(C_m^i) - 1\right)\right] \tag{29a}$$

$$\mathbf{n}^i = \frac{1}{2\sin(\phi)} \begin{bmatrix} C_m^i(3,2) - C_m^i(2,3) \\ C_m^i(1,3) - C_m^i(3,1) \\ C_m^i(2,1) - C_m^i(1,2) \end{bmatrix} = \mathbf{n}^m \tag{29b}$$

## V. 결론

본 고에서는 좌표변환행렬과 회전벡터 좌표값 사이의 관계에 대하여 상세히 살펴 보았다. 이를 위하여 먼저 회전벡터의 방향을 나타내는 고유축과 좌표변환을 고려하는 두 좌표계 기저벡터들 사이의 기하학적 개형을 살펴 보았다. 이로부터 고유축을 기준으로 두 좌표계는 기하학적으로 대칭이며 고유축의 좌표값은 두 좌표계에 대하여 동일한 값을 가짐을 알 수 있었다. 다음으로 좌표변환행렬의 열벡터를 구성하는 기저벡터 좌표값들의 특성을 분석하기 위하여 몇 가지의 단위 좌표변환 관계를 상세히 살펴보고 관련된 식들을 유도하였다. 마지막으로, 단위 좌표변환 분석에 의하여 얻어진 식들로부터 기저벡터 좌표값들에 적용되는 제한식들을 얻었으며 이로부터 좌표변환행렬과 회전벡터의 좌표값 사이의 관계식을 최종적으로 도출하였다. 본 고에서 설명된 회전벡터와 좌표변환행렬의 관계는 자세계산에 있어서 실용적으로 가장 널리 활용되는 쿼터니언 특성의 이해에 도움이 되리라 기대하며 글을 맺고자 한다.

## 참고문헌

- [1] 이형근, “벡터, 좌표계, 좌표값, 그리고 좌표변환 행렬,” 제어로봇시스템학회지, 제15권 제4호 (겨울호), pp. 38-42, 2009
- [2] 이형근, “좌표계의 회전과 코리올리 효과” 제어로봇시스템학회지, 제16권 제1호 (봄호), pp. 51-55, 2010

### ● 저자 약력



#### 이형근

- 1967년 6월 27일생
- 1990년 서울대 제어계측공학과 (공학사).
- 1994년 서울대 제어계측공학과 (석사).
- 2002년 서울대 전기컴퓨터공학부 (박사).
- 1994년~1998년 현대우주항공(주).
- 2003년~현재 : 한국항공대학교 항공전자 및 정보통신공학부 (부교수).
- 관심분야 : 항법, 측위, LBS, ITS, 추정이론