

## 적분 제어기를 이용한 이종 시변 외란을 갖는 선형 시변 다 개체 시스템의 동기화

# Synchronization of Linear Time-Varying Multi-Agent Systems with Heterogeneous Time-Varying Disturbances Using Integral Controller

김재용, 양종욱, 심형보, 김정수\*

(Jaeyong Kim<sup>1</sup>, Jongwook Yang<sup>1</sup>, Hyungbo Shim<sup>1</sup>, and Jung-Su Kim<sup>2</sup>)

<sup>1</sup>ASRI, Department of Electrical and Computer Engineering, Seoul National University

<sup>2</sup>Department of EBIT, SeoulTech

**Abstract:** This paper presents synchronization of LTV (Linear Time-Varying) MAS (Multi-Agent Systems) with heterogeneous time-varying disturbances under a fixed, connected, and undirected communication network. All the agents can collect only relative state information from their neighborhoods. To achieve synchronization of the MAS, an integral control scheme is proposed based on relative state information between agents.

**Keywords:** synchronization, heterogeneous time-varying disturbances, linear time-varying system

### I. 서론

최근 제어 및 시스템 이론 동향을 보면 다 개체 군집 시스템(MAS: Multi-Agent Systems)이 특정 목적을 달성하도록 MAS의 상태 변수들을 동기화(synchronization) 또는 일치(consensus) 시키는 문제가 주목을 받고 있다[1].

현재까지 이 같은 문제를 해결하기 위해서 각 개체들 간에 상대적인 상태 변수 정보만 주고받는다 가정 하에 많은 연구들이 수행되었다[2,3,7,10,11]. 대부분의 연구가 외란이 없는 동종 MAS의 동기화 문제를 다루었는데 실제로는 각 개체에 시변 외란이 존재할 가능성이 높다. 시변 외란이 존재하는 경우는 이종 시변 MAS의 동기화에 대한 연구로 볼 수도 있으나 이에 대한 연구는 대부분 이종 시변 MAS에 대한 것이었고[4] 시변 MAS에 대한 연구는 동종 MAS에 한정되어 왔다[5].

본 논문에서는 고정되고(fixed) 연결된(connected) 방향성 없는(undirected) 통신 환경에서 이종 시변 외란들을 갖는 선형 시변 MAS의 동기화 문제를 다룬다. 특히, 이종 시변 외란들의 차가 상수인 경우를 다루기 위하여 이웃한 개체 간 상태 변수의 상대적인 차이와 그 차이의 적분을 이용한 입력을 설계한다. 이러한 입력에 의하여 각 개체는 동기화

를 이루게 된다.

그래프 이론: 방향성이 있는 그래프는  $\mathcal{G}=(\mathcal{N},\mathcal{E},\mathcal{A})$  와 같이 표기 한다. 여기서  $\mathcal{N}=\{1,\dots,N\}$ 은 노드들의 집합이고,  $\mathcal{E}\in\mathcal{N}\times\mathcal{N}$ 는 노드들의 순서쌍으로 이루어진 에지들의 집합이다. 어떤 에지  $(i,j)$ 가  $\mathcal{E}$ 의 원소라면 노드  $i$ 에서 노드  $j$ 로의 연결이 되어있다는 것을 나타내고 노드  $i$ 에서 노드  $j$ 로의 경로는 서로 다른 노드들의 배열  $(i,\dots,j)$ 로 정해지는데 여기서 임의의 연속된 노드는 에지 집합의 원소가 된다. 본 논문에서 자가 연결은 고려하지 않는다. 즉,  $(i,i)\notin\mathcal{E}$ 이다. 그리고 모든 노드들  $i,j\in\mathcal{N}$ 에 대해서  $(i,j)\in\mathcal{E}$ 인 것이  $(j,i)\in\mathcal{E}$ 를 의미하면 방향성이 없는(undirected) 그래프라고 한다. 방향성이 없는 그래프가 연결되었다는 것은 임의의 두 노드  $i,j$  사이에 경로가 존재한다는 것을 의미한다.  $\mathcal{A}=[\alpha_{ij}]\in\mathbb{R}^{N\times N}$ 는 인접 행렬(adjacency matrix)로서 노드  $i$ 와 노드  $j$ 로의 연결이 있으면  $\alpha_{ij}$ 가 1이고 그렇지 않으면 0이다.

라플라시안 행렬  $L=[l_{ij}]\in\mathbb{R}^{N\times N}$ 은 다음과 같이  $L:=\mathcal{D}-\mathcal{A}$ 로 정의 된다. 여기서 대각 행렬  $\mathcal{D}$ 의 요소는  $d_i=\sum_{j=1}^N\alpha_{ij}$ 이다. 라플라시안 행렬의 정의에 따라  $L1_N=0$ 이 되므로 0인 고유치를 최소한 한 개 이상 갖고 그에 상응하는 요소가 모두 1인  $N\times 1$  고유 벡터  $1_N$ 을 갖는다. 또한 거쉬고린 원 정리(Gershgorin circle theorem)에 의해 모든 라플라시안 행렬의 고유치들은 열린 우방 평면에 위치하여  $0=\lambda_1\leq Re(\lambda_2)\leq\dots\leq Re(\lambda_N)$ 인 특성을 지닌다. 여기서,  $\lambda_i$ 는 라플라시안 행렬의 고유치이다. 그래프  $\mathcal{G}$ 가 연결되었다는 것은 라플라시안 행렬이 한 개의 0인 고유치를 갖는다는 것과 동치 관계이다[1]. 방향성이 없는 그래프의 경우 라플라시안 행렬  $L$ 이 대칭 행렬이므로 모든  $\lambda_i$ 들은

\* 책임저자(Corresponding Author)

논문접수: 2012. 4. 30., 수정: 2012. 6. 18., 채택확정: 2012. 6. 20.

김재용, 양종욱, 심형보: 서울대학교 전기 컴퓨터 공학과

(jykim@cdisl.kr/wookchan@snu.ac.kr/hshim@snu.ac.kr)

김정수: 서울과학기술대학교 전기정보시스템공학과

(jungsu@seoultech.ac.kr)

※ 본 논문은 연구재단 기초연구사업-일반 연구자 지원사업 (No. 2010-0006131)과 2012년도 정부(교육과학기술부)의 재원으로 한국연구재단의 기초연구사업(No. 2012-0000921)에서 공동 지원을 받아 수행되었음.

※ 본 논문은 2012년 27회 ICROS 학술대회에서 초안이 발표되었음.

실수가 된다.

표기법:  $A_1, \dots, A_k$ 인 행렬들에 대해서  $diag(A_1, \dots, A_k)$ 는  $A_i$ 가  $i$ 번째 대각 요소인 대각 행렬을 의미하고  $A_i > 0$ 은 양부호행렬(positive definite matrix)를 의미한다.

## II. 본문

다음과 같은  $N$ 개의 1차 이중 선형 시변 MAS를 고려하자.

$$\dot{x}_i = a(t)x_i + b_i(t) + u_i \quad (1)$$

여기서  $x_i \in \mathbb{R}$ ,  $u_i \in \mathbb{R}$ ,  $i \in \mathcal{N} = \{1, \dots, N\}$ 이고  $a(t)$ ,  $b_i(t)$ 는 연속함수이며 초기시간  $t_0$ 에 대하여  $t \in [t_0, \infty)$ 에서  $|a(t)| \leq M$ 을 만족하는 실수  $M$ 이 존재한다. 시스템 (1)은 각 개체에 이중 시변 외란이 존재하는 동중 선형 시변 MAS로도 생각할 수 있다.

가정 1: 모든  $t \geq t_0$ 와 모든  $i \geq 2$ 에 대하여  $b_i(t) - b_1(t) = D_i$ 를 만족하는 실수  $D_i$ 가 존재한다.

가정 1은 각 개체의 외란들이 서로 다르고 그 차이들이 모두 상수인 경우에 해당한다.

정의 1: 시스템 (1)에 대해서 다음 조건을 만족하는 신호  $\zeta(t) \in \mathbb{R}$ 가 존재할 때 동기화(synchronization)를 이루었다고 한다.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |x_i(t) - \zeta(t)| = 0, \quad \forall i \in \mathcal{N} \quad (2)$$

이 논문에서는 동기화 조건 (2)를 만족시키기 위해 다음과 같은 형태의 입력  $u_i$ 를 고려한다.

$$u_i = k \sum_{j=1}^N \alpha_{ij} (x_j - x_i) + c_i \int_{t_0}^t \sum_{j=1}^N \alpha_{ij} (x_j(\tau) - x_i(\tau)) d\tau \quad (3)$$

여기서  $k \in \mathbb{R}$ 는 모든 개체에 공통으로 사용되는 케환 이득이고  $c_i \in \mathbb{R}$ 는 각 개체가 사용하는 적분 케환 이득이다. 제어 (3)에서  $\alpha_{ij}$ 는 각 개체 사이의 연결 상태를 나타내는데 연결이 있으면 1이고 없으면 0이다. 본 논문에서는 고정되고(fixed) 연결된(connected) 방향성 없는(undirected) 통신 환경을 가정한다.

주 1: 현실 세계에서 각 개체는 자신의 상태 정보를 정확히 알기 어렵기 때문에 (3)에서와 같이 각 개체들은 연결된(서로 통신할 수 있는) 이웃한 개체와의 상대적인 상태 정보만을 주고받을 수 있다고 보는 것이 타당하다.

정리 1: 가정 1이 만족된다고 하자. 제어 입력 (3)에서  $k > 1 + \frac{M}{\lambda_2}$  이고 모든  $i \in \mathcal{N}$ 에 대해서  $c_i = \lambda_i$ 가 된다면 시스템 (1)은 동기화를 이루게 된다. 여기서  $\lambda_i$ 는 라플라시안 행렬(Laplacian matrix)의 고유치이다.  $\square$

증명: 제시된 입력 (3)을 고려하여 시스템 (1)을 벡터형태로 표현하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -kLx + diag(a(t), A(t))x + [b_1(t), B^T(t)]^T \\ &\quad - diag(c_1, C)z \\ \dot{z} &= Lx \end{aligned} \quad (4)$$

여기서  $x = [x_1, \dots, x_N]^T$ ,  $z = [z_1, \dots, z_N]^T$ ,  $A(t) = diag(a(t), \dots, a(t)) \in \mathbb{R}^{(N-1) \times (N-1)}$ ,  $B(t) = [b_2(t), \dots, b_N(t)]^T \in \mathbb{R}^{(N-1)}$ ,  $C = diag(c_2, \dots, c_N) \in \mathbb{R}^{(N-1) \times (N-1)}$ 이고  $L$ 은 라플라시안 행렬이다. 앞에서 언급된 통신 환경에 따라 방향성이 없는 그래프가 연결 되어 있기 때문에  $L$ 은 0인 고유치를 한 개만 가지고 모든 고유치들은 실수가 된다. 그렇게 되면 다음과 같이  $TLLT^{-1} = diag(0, A)$ 인 변환행렬  $T$ 가 존재하는데  $T = \begin{bmatrix} r_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{bmatrix}$ ,  $T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & Q_{12} \\ 1_{N-1} & Q_{22} \end{bmatrix}$ ,  $A = diag(\lambda_2, \dots, \lambda_N)$ 이고  $0 = \lambda_1 < \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_N$ 를 만족 한다[1]. 또한  $TT^{-1} = I_N$ 를 이용해서 다음과 같은 네트워크 특성을 구할 수 있다.

$$R_{21} + R_{22}1_{N-1} = 0_{N-1} \quad (5)$$

$$R_{21}Q_{12} + R_{22}Q_{22} = I_{N-1} \quad (6)$$

앞에서 정의된 변환행렬  $T$ 를 이용하여  $[\xi_1, \tilde{\xi}^T]^T = Tx$ 와  $[\gamma_1, \tilde{\gamma}^T]^T = Tz$ 인 변환을 고려하면 시스템 (4)는 다음과 같이 바뀌게 된다. 여기서,  $\tilde{\xi} = [\xi_2, \dots, \xi_N]^T$ 이고  $\tilde{\gamma} = [\gamma_2, \dots, \gamma_N]^T$ 이다.

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_1 &= \begin{Bmatrix} r_{11}a(t) & \\ +R_{12}A(t)1_{N-1} & \end{Bmatrix} \xi_1 + \begin{Bmatrix} r_{11}a(t)Q_{12} & \\ +R_{12}A(t)Q_{22} & \end{Bmatrix} \tilde{\xi} \\ &\quad + \{r_{11}b_1(t) + R_{12}B(t)\} - c_1\gamma_1 \\ \dot{\tilde{\xi}} &= \begin{Bmatrix} a(t)R_{21} & \\ +R_{22}A(t)1_{N-1} & \end{Bmatrix} \xi_1 + \begin{Bmatrix} -kA\tilde{\xi} + a(t)R_{21}Q_{12} & \\ +R_{22}A(t)Q_{22} & \end{Bmatrix} \tilde{\xi} \\ &\quad + \{b_1(t)R_{21} + R_{22}B(t)\} - C\tilde{\gamma} \\ \dot{\gamma}_1 &= 0 \\ \dot{\tilde{\gamma}} &= A\tilde{\xi} \end{aligned} \quad (7)$$

좌표변화  $x = T^{-1}[\xi_1, \tilde{\xi}^T]^T = \begin{bmatrix} 1 & Q_{12} \\ 1_{N-1} & Q_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \tilde{\xi} \end{bmatrix}$ 로부터  $\tilde{\xi}$ 가 점근적으로 안정화되면 모든  $i \in \mathcal{N}$ 에 대해서  $x_i \rightarrow \xi_1$ 이 되면서 시스템 (1)이 동기화가 되는 것을 알 수 있다. (7)에서  $\tilde{\xi}$ 와  $\tilde{\gamma}$ 의 동역학식은 네트워크 특성 (5), (6)에 의해 다음과 같이 바뀌게 된다.

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\xi}} &= -\{kA\tilde{\xi} - A(t)\}\tilde{\xi} + R_{22}\{B(t) - b_1(t)1_{N-1}\} \\ &\quad - C\tilde{\gamma} \\ \dot{\tilde{\gamma}} &= A\tilde{\xi} \end{aligned} \quad (8)$$

시스템 (8)의  $\tilde{\xi}$  동역학식은 더 이상  $\xi_1$ 에 의존하지 않고  $b_2(t) - b_1(t)$ 와  $\tilde{\gamma}$ 에 의존하는 시스템이 된다. 가정 1에서 각 개체의 외란들의 차이가 상수인 경우를 가정하였으므로 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\xi}} &= -\{kA\tilde{\xi} - A(t)\}\tilde{\xi} + R_{22}D - C\tilde{\gamma} \\ \dot{\tilde{\gamma}} &= A\tilde{\xi} \end{aligned} \quad (9)$$

여기서  $D := [D_2, D_3, \dots, D_N]^T$ 이다. 또한 가정에서  $c_i = \lambda_i$ 라고 하였으므로  $C = A$ 이다.  $A$ 가 가역행렬 (invertible matrix)이므로 역행렬  $A^{-1}$ 이 존재하고 변수 치환  $\delta := \tilde{\gamma} - A^{-1}R_{22}D$ 을 고려하면 식 (9)는 다음과 같이 바뀔 수 있다.

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{\xi}} &= -\{kA\tilde{\xi} - A(t)\}\tilde{\xi} - A\delta \\ \dot{\delta} &= A\tilde{\xi}\end{aligned}\quad (10)$$

식 (10)에서  $\tilde{\xi} = 0_{N-1}, \delta = 0$ 은 시스템의 평형점이 된다.

$\tilde{\xi}$ 와  $\delta$ 에서 평형점의 안정도를 판별하기 위해서 다음과 같은 리아프노프 함수(Lyapunov function)를 취한다.

$$\begin{aligned}V(\tilde{\xi}, \delta) &= \frac{1}{2}\tilde{\xi}^T\tilde{\xi} + \frac{1}{2}\delta^T\delta + l\tilde{\xi}^T\delta \\ &= \frac{1}{2}(\tilde{\xi} + l\delta)^T(\tilde{\xi} + l\delta) + \frac{(1-l^2)}{2}\delta^T\delta, \quad (0 < l < 1)\end{aligned}$$

$V(\tilde{\xi}, \delta)$ 를 시간에 대한 미분을 통해 다음 식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned}\dot{V}(\tilde{\xi}, \delta) &= \frac{1}{2}\dot{\tilde{\xi}}^T\tilde{\xi} + \frac{1}{2}\tilde{\xi}^T\dot{\tilde{\xi}} + \frac{1}{2}\dot{\delta}^T\delta + \frac{1}{2}\delta^T\dot{\delta} + l\dot{\tilde{\xi}}^T\delta + l\tilde{\xi}^T\dot{\delta} \\ &= -\tilde{\xi}^T\{(k-l)A - A(t)\}\tilde{\xi} - \delta^T\{l(kA - A(t))\}\tilde{\xi} - l\delta^T A\delta \\ &= -[\tilde{\xi}^T \ \delta^T] \begin{bmatrix} (k-l)A - A(t) & l(kA - A(t)) \\ l(kA - A(t))^T & lA \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\xi} \\ \delta \end{bmatrix} \\ &:= -[\tilde{\xi}^T \ \delta^T] \begin{bmatrix} P_{11}(t) & P_{12}(t) \\ P_{21}(t) & P_{22}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\xi} \\ \delta \end{bmatrix} \\ &:= -[\tilde{\xi}^T \ \delta^T] P(t) \begin{bmatrix} \tilde{\xi} \\ \delta \end{bmatrix}\end{aligned}$$

여기서  $P(t) \in \mathbb{R}^{2(N-1) \times 2(N-1)}$ 는 정방행렬이다. 만약  $P(t)$ 가 모든  $t \geq t_0$ 에 대해서 양부호행렬(positive definite matrix)이라면  $\dot{V}(\tilde{\xi}, \delta)$ 가 음부호행렬(negative definite matrix)이 되므로  $\tilde{\xi}, \delta$  시스템은 점근적으로 안정화된다. 시스템 (1)의 주어진 조건에 의해 모든  $t \geq t_0, 0 < l < 1$ 에서  $-MI_{N-1} \leq A(t) \leq MI_{N-1}$ 가 되므로 다음과 같은 부등식을 만족하게 된다.

$$0 < \{\lambda_2(k-1) - M\}I_{N-1} \leq (k-l)A - A(t)$$

$k > 1 + \frac{M}{\lambda_2}$ 이므로  $P_{11}(t)$ 는 모든  $t \geq t_0, 0 < l < 1$ 에서 비특이행렬(nonsingular matrix)이 되어 역행렬  $P_{11}^{-1}(t)$ 이 존재하며 [6]의 행렬 상반 공식(matrix inversion formulas)으로  $P(t)$ 는 다음과 같이 분해될 수 있다.

$$P(t) = \begin{bmatrix} I_{N-1} & 0 \\ \tilde{P}^T(t) & I_{N-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{11}(t) & 0 \\ 0 & \Delta(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{N-1} & \tilde{P}^T(t) \\ 0 & I_{N-1} \end{bmatrix}$$

여기서  $\Delta(t) := P_{22}(t) - P_{21}(t)P_{11}^{-1}(t)P_{12}(t)$ 이고  $\tilde{P}(t) := P_{11}^{-1}(t)P_{12}(t)$ 이다. 위와 같이 분해함으로써  $\det P(t) = \det P_{11}(t)\det \Delta(t)$ 이므로 대칭행렬  $P(t)$ 가 모든  $t \geq t_0, 0 < l < 1$ 에서 양부호행렬이 될 조건은 모든  $t \geq t_0, 0 < l < 1$ 에서  $P(t) > 0$ 이고  $\Delta(t) > 0$ 일 조건과 동치 관계이다.  $P_{11}(t) > 0$ 인 조건은 앞에서 언급한 것과 같이

$k > 1 + \frac{M}{\lambda_2}$ 이므로 만족할 수 있다.  $(k-l)A - A(t)$ 가 대각행렬(diagonal matrix)이고  $0 < \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_N$ 이므로 모든  $t \geq t_0, 0 < l < 1$ 에 대해서 다음과 같은 부등식을 만족한다.

$$0 < \{(k-l)A - A(t)\}^{-1} \leq \frac{1}{\lambda_2(k-1) - M}I_{N-1} \quad (11)$$

$$0 < l\{kA - A(t)\} \leq l(k\lambda_N + M)I_{N-1} \quad (12)$$

식 (11)과 (12)를 이용하면  $P_{21}(t)P_{11}^{-1}(t)P_{12}(t)$ 는 다음과 같은 부등식을 만족한다.

$$\begin{aligned}P_{21}(t)P_{11}^{-1}(t)P_{12}(t) &= \frac{\{l(kA - A(t))\}^T \{(k-1)A - A(t)\}^{-1} \{l(kA - A(t))\}}{4} \\ &\leq \frac{l^2(k\lambda_N + M)^2}{4\{\lambda_2(k-1) - M\}}I_{N-1}\end{aligned}$$

$P_{22}(t) = lA$ 이므로 만약  $l < \frac{4\lambda_2\{\lambda_2(k-1) - M\}}{(k\lambda_N + M)^2}$ 가 만족된다면

$$\begin{aligned}\Delta(t) &= P_{22}(t) - P_{21}(t)P_{11}^{-1}(t)P_{12}(t) \\ &\geq \left\{ l\lambda_2 - \frac{l^2(k\lambda_N + M)^2}{4\{\lambda_2(k-1) - M\}} \right\} I_{N-1} > 0\end{aligned}$$

가 되어서  $P(t)$ 는 모든  $t \geq t_0, 0 < l < 1$ 에서 양부호행렬이 된다. 그러므로 만약  $l$ 을 다음과 같은 부등식

$$0 < l < \min \left\{ 1, \frac{4\lambda_2\{\lambda_2(k-1) - M\}}{(k\lambda_N + M)^2} \right\}$$

이 만족하도록 정한다면  $\dot{V}(\tilde{\xi}, \delta)$ 가 음부호행렬이 되고  $\tilde{\xi}, \delta$ 은 점근적으로 안정한 평형점을 갖는다. 따라서 시스템 (1)은 동기화를 이루게 된다. ■

주 2: 정리 1에서 적분 궤환 이득  $c_i$ 가 리플라시안 행렬  $L$ 의 고유치  $\lambda_i$ 와 같아야 한다는 조건은 제한적인 조건으로 여겨질 수도 있다. 이 조건은 시스템 (8)의 안정성을 보다 엄밀하게 분석하기 위하여 제안되었다. 하지만 실제로  $c_i$ 가  $\lambda_i$ 를 포함하는 적절한 구간 내에 존재한다면 마찬가지로 시스템 (1)은 동기화를 이룰 수 있게 된다. 이는 다음의 모의실험을 통해서 알 수 있다.

### III. 모의실험

모의실험을 위해 다음과 같은 속도 제어기를 갖는 4대의 개체를 고려해 보자[8].

$$\begin{aligned}\dot{x}_i &= v_i \\ \dot{v}_i &= -\tau v_i + \tau v_i^d + \tau u_i\end{aligned}\quad (13)$$

여기서  $x_i, v_i$ 는  $i$ 번째 개체의 위치, 속도 상태이고  $v_i^d$ 는  $i$ 번째 개체가 원하는 속도 상태이며  $\tau > 0$ 는 시간 상수이다.

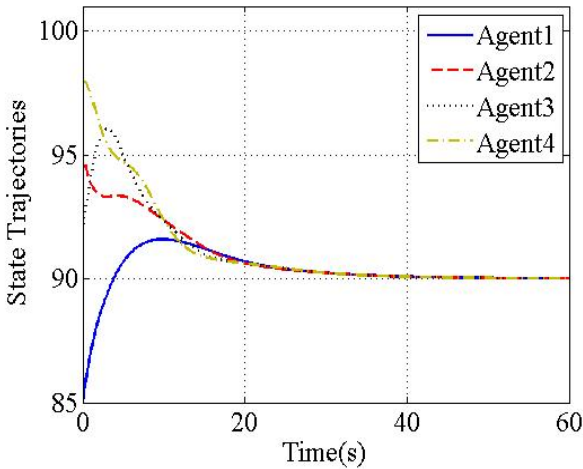


그림 1. 각 개체들의 상태 변수 ( $c_i = \lambda_i$ ).

Fig. 1. The state trajectories of each agent ( $c_i = \lambda_i$ ).



그림 2. 개체들의 정보 흐름 그래프.

Fig. 2. The information flow graph of the agents.

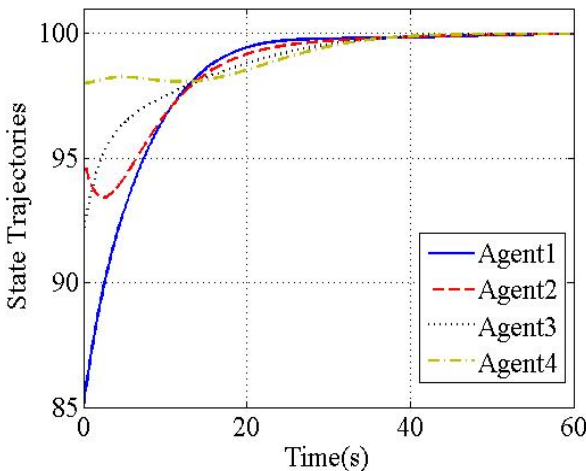


그림 3. 각 개체들의 상태 변수 ( $c_i = 0.5$ ).

Fig. 3. The state trajectories of each agent ( $c_i = 0.5$ ).

(13)에서 입력  $u_i$ 가 없다고 생각한다면 각 개체의 속도는 자신이 원하는 속도  $v_i^d$ 로 수렴하게 된다.  $v_i^d$ 가 서로 다른 상황에서 개체들의 군집 자율 주행(속도 일치)을 위하여 본 논문에서 제시한 입력 (3)을 생각해 본다. 모의실험에서 각 개체들의 연결 상태는 다음과 같다.

그림 2에 따른 라플라시안 행렬과 그 고유치들은 다음과 같다.

$$L = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0.5858,$$

$\lambda_3 = 2, \lambda_4 = 3.4142$ . 여기서  $\tau = 0.1, k = 2, c_i = \lambda_i$ 라고 놓으면 그림 1과 같은 결과를 얻을 수 있다. 각 개체의 초기값은  $v(0) = [85, 95, 92, 98]$ 로 하였고 원하는 속도는  $v^d = [90, 105, 95, 110]$ 로 놓았다.  $c_1 = 0$ 이기 때문에 그림 1에서 모든 개체들의 속도가 첫 번째 개체가 원하는 속도 90으로 수렴하는 것을 알 수 있다. 그림 3은 모든 개체들에 대해서  $c_i = 0.5$ 로 적분 제환 이득이 모두 같은 경우의 결과이다. 이 경우에는 각 개체가 원하는 속도들의 평균값 100으로 수렴하는 것을 알 수 있다.

#### IV. 결론

본 논문에서는 이중 시변 외란들을 갖는 1차 선형 시변 MAS의 동기화 문제를 다루었다. 이는 개체수가 2개인 경우를 다룬 [9]를 일반적인  $N$ 개로 확장한 결과이다. 동기화를 위한 제어 입력을 제안하였고 모의실험을 통하여 동기화가 됨을 보였다. 주어진 MAS는 이중 시변 외란들에 대한 결과이므로 동종 시변 외란들이나 이중 시불변 외란의 경우에도 본 논문의 결과가 적용됨을 알 수 있다.

#### 참고문헌

- [1] W. Ren, R. Beard, and E. Atkins, "Information consensus in multivehicle cooperative control," *IEEE Control Syst. Mag.*, vol. 27, no. 2, pp. 71-82, Apr. 2007.
- [2] J. Seo, H. Shim, and J. Back, "Consensus of high order linear systems using dynamic output feedback-compensator: Low gain approach," *Automatica*, vol. 45, no. 11, pp. 2659-2664, 2009.
- [3] S. Tuna, "LQR-based coupling gain for synchronization of linear systems," Arxiv preprint Arxiv:0801.3390, 2008.
- [4] H. Kim, H. Shim, and J. Seo, "Output consensus of heterogeneous uncertain linear multi-agent systems," *IEEE Trans. Autom. Control*, vol. 56, no. 1, pp. 200-206, 2011.
- [5] S. Tuna, "Sufficient conditions on observability grammian for synchronization in arrays of coupled linear time-varying systems," *IEEE Trans. Autom. Control*, vol. 55, no. 11, pp. 2586-2590, 2010.
- [6] K. Zhou and J. Doyle, *Essentials of Robust Control*, Prentice Hall, 1998.
- [7] P. Wieland, J. Kim, and F. Allgöwer, "On topology and dynamics of consensus among linear high-order agents," *Int J Syst Sci*, vol. 42, no. 10, pp. 1831-1842, 2011.
- [8] F. Bu, H. S. Tan, and J. Huang, "Design and field testing of a cooperative adaptive cruise control system," *American Control Conf. (ACC)*, pp. 4616-4621, 2010.
- [9] J. Y. Kim, J. W. Yang, J.-S. Kim, and H. B. Shim, "Synchronization for linear time-varying multi-agent systems with heterogeneous time-varying disturbances,"

*Proc. of the 27th ICROS Annual Conference (in Korean)*, pp. 307-308, Apr. 2012.

- [10] H. Kim, S. Kim, H. Shim, and J. Back, "Order reduction paradigm for consensus of neutrally stable multi-agent systems," *Journal of Institute of Control, Robotics, and Systems (in Korean)*, vol. 16, no. 3, pp. 222-226, Mar. 2010.
- [11] J. Kim, H. Kim, H. Shim, and J. Back, "Output consensus of non-identical and stabilizable linear systems having the same transfer matrix," *Journal of Institute of Control, Robotics, and Systems (in Korean)*, vol. 17, no. 9, pp. 857-862, 2011.



#### 김재용

2010년 서울대 전기 공학부 졸업. 2010년~현재 동대 전기 컴퓨터 공학부 석·박사 통합 과정. 관심분야는 다개체 제어, 비선형 시스템.



#### 양종욱

1999년 서울대 전기 공학부 학사. 2001, 2011년 동대 전기 컴퓨터 공학부 석사와 박사 학위. 2011년~현재 서울대학교 박사 후 연구원. 관심분야는 비선형 관측기, 다개체 제어. Robot manipulator.



#### 심형보

1993년, 1995년, 2000년 서울대 전기공학과 학사, 석사와 박사 학위. 2000년~2001년 미국 California 대학 박사 후 연구원. 2002년~2003년 한양대 전자전기컴퓨터공학부 교수. 2003년~현재 서울대 전기정보공학부 교수. 관심분야는 다개체 제어, 하이브리드 시스템.



#### 김정수

1998년, 2005년 고려대 전기공학과 학사와 박사 학위. 2005년 서울대 박사 후 연구원. 2006년~2007년 독일 Stuttgart 대학 박사 후 연구원. 2008년 영국 Leicester 대학 박사 후 연구원. 2009년~현재 서울과학기술대학교 전기정보시스템공학과 교수. 관심분야는 다개체 제어, 예측 제어.