

Hartley 함수를 이용한 선형시스템의 상태해석에 관한 연구

Study for State Analysis of Linear Systems by using Hartley Functions

김 범 수, 민 치 현*
(Beom-Soo Kim¹ and Chi-Hyun Min¹)

¹Gyeongsang National University

Abstract: In this paper Hartley functions are used to approximate the solutions of continuous time linear dynamical system. The Hartley function and its integral operational matrix are first presented, an efficient algorithm to solve the Stein equation is proposed. The algorithm is based on the compound matrix and the inverse of sum of matrices. Using the structure of the Hartley's integral operational matrix, the full order Stein equation should be solved in terms of the solutions of pure algebraic matrix equations, which reduces the computation time remarkably. Finally a numerical example is illustrated to demonstrate the validity of the proposed algorithm.

Keywords: linear system, Hartley function, Stein equation, compound matrix

I. 서론

동적 시스템 해석 문제를 포함하여 미분 방정식이나 편미분 방정식의 해를 구하는데 많은 직교 함수들이 이용되고 있다. 이들 직교 함수들은 일반적으로 크게 세 개의 그룹으로 분류할 수 있다. 첫 번째 그룹은 부분 상수(piecewise constant) 함수로서 Walsh 함수, 블록 펄스(block pulse) 함수 등이 이에 속한다. 두 번째는 직교 다항식(orthogonal polynomial) 그룹으로 Laguerre 다항식, Legendre 다항식, Chebyshev 다항식 등이 이에 포함된다. 그리고 세 번째는 Fourier 함수, Hartley 함수 등 sine-cosine 함수들로 이루어진 그룹이다[1]. Walsh 함수, 블록 펄스 함수, Fourier 급수, Legendre 다항식, 웨이블릿 함수 등과 같이 Hartley 함수도 직교 함수로서 임의의 함수를 이들 직교 함수로 표현할 수 있다. Laplace 변환을 이용하여 선형 미분 방정식을 대수적 문제로 변환하여 문제를 매우 단순화시킬 수 있는 장점과 같이 이들 직교 함수를 이용하여 다양한 방법으로 동적 문제를 대수적 문제로 변환하여 해를 구하는 연구가 진행되고 있다[1-6].

푸리에 함수와 달리 시간과 주파수 영역 양쪽에서 함수의 국부성(localization)을 잘 나타낼 수 있는 특징을 가진 Haar 웨이블릿을 이용하여 동적 시스템 문제를 해결하고자 하는 연구가 상당히 진행되어 왔다[2-5]. 이는 주어진 시간 함수를 웨이블릿 직교 기저 함수와 이 함수를 적분한 것으로 재구성함으로써 미분 또는 편미분 방정식을 대수 행렬 방정식 문제로 변환한 후 해를 구하는 것이다. 일반적으로 이 대수 행렬 방정식은 Stein 행렬 방정식으로 표현되고 정확한 해에 좀 더 근사적인 해를 구하기 위해서는 Haar 함수 행렬의 차원을 증가시켜야 하는 문제를 안고 있다.

푸리에 변환과 유사한 Hartley 변환은 차원 n 인 Hartley 함

수 $\cos(n\omega t) + \sin(n\omega t)$ 를 커널(kernel)로 한다. Hartley 함수는 직교 함수로서 유입 전류(inrush current) 계산[6], 신호 인식(signal recognition) [7], 동기 전동기의 파라미터 추정[8] 등에 이용되고 있다.

본 연구에서는 선형 미분 방정식으로 표현된 동적 시스템을 Hartley 함수 벡터와 이 함수의 적분 연산 행렬을 이용하여 상태 방정식을 적분하여 주어진 미분 방정식의 문제를 대수적 문제로 변환하여 해를 구하는 알고리즘을 제시한다. Haar 웨이블릿을 적용하여 동적 시스템의 해를 구하는 것과 마찬가지로 정확한 해에 매우 근접한 해를 구하기 위해서는 Hartley 함수 벡터의 차원을 증가시켜야 하는데 이는 대수 행렬 방정식인 Stein 방정식의 행렬의 차원을 매우 크게 하여 계산량이 매우 크게 증가한다. 따라서 이를 개선하기 위해 Hartley 함수의 적분 연산 행렬의 구조적 특성을 이용하여 전체 행렬 방정식을 저차의 행렬 방정식들로 분리한 후 구해진 저차의 행렬 방정식에서 두 행렬의 합의 역행렬 정리와 복합행렬(compound matrix)의 특성을 이용하여 저차의 행렬 방정식에서 역행렬 존재의 조건을 쉽게 판별할 수 있는 방법과 계산량을 줄이고 효율적으로 계산할 수 있는 방법을 제시한다.

II. Hartley 함수

Hartley 함수는 푸리에 급수가 복소 지수 함수 $e^{-j\omega t}$ 를 커널 함수로 하는 것과 유사하게 정현과 함수로 구성된 $\cos(n\omega t) + \sin(n\omega t)$ 를 커널 함수로 한다. 일반적으로 Hartley 함수를 $cas(n\omega t) := \cos(n\omega t) + \sin(n\omega t)$ 로 표현한다. 그림 1은 $n=2$ 일 때 Hartley 함수를 보여준다.

직교 함수로 구성된 푸리에 급수를 이용하여 임의의 함수를 표현할 수 있듯이 Hartley 함수도 직교 함수이므로 임의의 주기함수를 (1)과 같이 Hartley 기저 함수들의 선형 결합으로 표현할 수 있다.

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k cas(k\omega t) \quad (1)$$

* 책임저자(Corresponding Author)

논문접수: 2012. 2. 8., 수정: 2012. 8. 3., 채택확정: 2012. 8. 9.

김범수: 경상대학교 기계시스템공학과, 해양산업연구소

(kimbs@gsnu.ac.kr)

민치현: 경상대학교 기계시스템공학과(mch4001@naver.com)

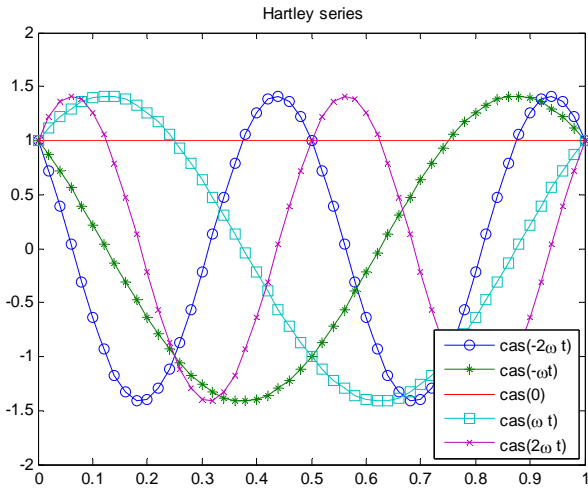


그림 1. Hartley 함수 (n=2).
Fig. 1. Hartley functions (n=2).

여기서 Hartley 계수 c_k 들은 Hartley 함수가 직교기저 함수이므로 $f(t)$ 와 Hartley 함수와의 내적으로 유일하게 구해진다.

$$c_k = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \text{cas}(k\omega t) dt \quad (2)$$

식 (1)에서 무한 급수로 전개된 주기 T 인 $f(t)$ 를 $2n+1$ 개의 Hartley 함수로 근사화 시키면 다음과 같이 벡터 형태로 표현할 수 있다.

$$f(t) \approx \mathbf{F}^T \mathbf{H}(t) \quad (3)$$

Hartley 함수 계수 벡터 \mathbf{F} 와 Hartley 함수 벡터 $\mathbf{H}(t)$ 는 다음과 같이 정의한다.

$$\mathbf{F} = [c_{-n} \ \dots \ c_{-1} \ c_0 \ c_1 \ \dots \ c_n]^T \quad (4)$$

$$\mathbf{H}(t) = [H_{-n}(t) \ \dots \ H_{-1}(t) \ H_0(t) \ H_1(t) \ \dots \ H_n(t)]^T$$

여기서 첨자 T 는 행렬의 전치를 뜻하며 Hartley 함수 벡터의 원소는 $H_k(t) = \cos(k\omega t) + \sin(k\omega t)$ 이다.

직교 기저함수의 적분 연산 행렬을 이용하여 미분방정식의 근사해를 구할 수 있다. Hartley 함수를 적분하면 다음과 같다.

$$\int_0^t H_0(\tau) d\tau = \int_0^t d\tau = t \quad (5)$$

이고

$$\int_0^t H_k(\tau) d\tau = \int_0^t \text{cas}(k\omega\tau) d\tau = \frac{1}{2k\pi} (1 - \text{cas}(-k\omega t)) \quad (6)$$

이 된다. 식 (4)에서 정의한 Hartley 함수 벡터 $\mathbf{H}(t)$ 를 이용하여 적분된 Hartley 함수를 다시 Hartley 기저 함수의 급수로 표현할 수 있다.

$$\int_0^t H_0(\tau) d\tau = \frac{t}{2\pi} \begin{bmatrix} \frac{1}{n} & \dots & \frac{1}{2} & 1 & \pi & -1 & \frac{1}{2} & \dots & \frac{1}{n} \end{bmatrix} \mathbf{H}(t) \quad (7)$$

$k \neq 0$ 일 때는

$$\int_0^t H_k(\tau) d\tau = \frac{t}{2\pi} \sum_{i=-n}^n c_i H_i(t) \quad (8)$$

로 근사화할 수 있으며, $k < 0$ 인 경우는

$$c_i = \begin{cases} -\frac{1}{k} & i = 0 \\ \frac{1}{k} & i > 0 \text{ and } k = -i \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

이며 $k > 0$ 일 때는

$$c_i = \begin{cases} \frac{1}{k} & i = 0 \\ -\frac{1}{k} & i > 0 \text{ and } k = -i \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

이다.

따라서 Hartley 함수 벡터에 대한 적분 연산 행렬(operational matrix) \mathbf{P} 는 다음과 같이 구해지며

$$\int_0^t \mathbf{H}(\tau) d\tau \approx \mathbf{P} \mathbf{H}(t) \quad (9)$$

이 적분 연산 행렬은 $2n+1 \times 2n+1$ 크기를 갖는 정방행렬로서 매우 희소(sparse)한 구조를 갖는다[6].

$$\mathbf{P} = \frac{T}{2\pi} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{1}{n} & 0 & 0 & \dots & \frac{1}{n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{1}{n} & \dots & \frac{1}{2} & 1 & \pi & -1 & \frac{1}{2} & \dots & \frac{1}{n} \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{n} & 0 & 0 & \frac{1}{n} & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad (10)$$

III. 선형 시스템의 상태 해석

다음과 같은 선형 시스템을 고려해 보자.

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \quad (11)$$

여기서 $\mathbf{x}(t) \in R^p$ 는 상태 벡터, $\mathbf{u}(t) \in R^q$ 는 입력 벡터이고, 계수 행렬은 $\mathbf{A} \in R^{p \times p}$, $\mathbf{B} \in R^{p \times q}$ 이고 초기치는 $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ 이다. 그리고 \mathbf{A} 는 정칙행렬이라 가정한다.

입력 $\mathbf{u}(t)$ 는 다음과 같이 근사적으로 Hartley 함수 벡터의 선형결합으로 표현할 수 있다.

$$\mathbf{u}(t) \approx \mathbf{U}\mathbf{H}(t) \quad (12)$$

Hartley 함수 벡터를 이용하여 위의 선형시스템을 해석하기 위해서 상태 벡터의 미분을 미지의 행렬 $\mathbf{X} \in R^{p \times 2n+1}$ 를 도입하여 식 (13)과 같이 Hartley 함수 벡터로 근사화 하고

$$\dot{\mathbf{x}}(t) \approx \mathbf{X}\mathbf{H}(t) \quad (13)$$

이 식의 양변을 적분하고 식 (8)을 이용하면

$$\mathbf{x}(t) \approx \mathbf{X} \int_0^t \mathbf{H}(\tau) d\tau + \mathbf{x}_0 \approx \mathbf{X}\mathbf{P}\mathbf{H}(t) + \mathbf{x}_0 \quad (14)$$

와 같이 근사화하여 쓸 수 있다. 식 (12)~(14)를 상태방정식 (11)에 대입하면 다음과 같다.

$$\mathbf{X}\mathbf{H}(t) = \mathbf{A}(\mathbf{X}\mathbf{P}\mathbf{H}(t) + \mathbf{x}_0) + \mathbf{B}\mathbf{U}\mathbf{H}(t) \quad (15)$$

식 (15)에서 $\mathbf{A}\mathbf{x}_0 \in R^{q \times 1}$ 은 열 벡터이고 Hartley 함수 벡터의 $n+1$ 번째 함수는 $H_0(t) = 1$ 이므로 $\mathbf{A}\mathbf{x}_0$ 를 $[0 \dots 0 \ \mathbf{A}\mathbf{x}_0 \ 0 \dots 0]\mathbf{H}(t)$ 와 같이 Hartley 함수 벡터로 표현하면 식 (15)는

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}\mathbf{X}\mathbf{P} + [0 \dots 0 \ \mathbf{A}\mathbf{x}_0 \ 0 \dots 0] + \mathbf{B}\mathbf{U} \quad (16)$$

와 같이 Stein 방정식으로 표현된다. 여기서 $\mathbf{Q} := [0 \dots 0 \ \mathbf{A}\mathbf{x}_0 \ 0 \dots 0] + \mathbf{B}\mathbf{U}$ 로 정의하면 식 (16)은 다음과 같이 간략히 표현할 수 있다.

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}\mathbf{X}\mathbf{P} + \mathbf{Q} \quad (17)$$

따라서 미분 상태 행렬 방정식 (15)의 근사 해는 대수 Stein 행렬 방정식 (17)의 해를 구하는 문제로 귀결된다. 일반적으로 이 방정식의 해는 보조정리 1과 같이 Kronecker 곱으로 구할 수 있다.

보조정리 1 [9]: 행렬 방정식 (17)은 임의의 i, j 에 대해서 $\lambda_i(\mathbf{A})\lambda_j(\mathbf{P}) \neq -1$ 이면 다음과 같이 유일한 해를 갖는다.

$$\text{vec}(\mathbf{X}) = (\mathbf{I} - \mathbf{P}^T \otimes \mathbf{A})^{-1} \text{vec}(\mathbf{Q}) \quad (18)$$

여기서 행렬 $\mathbf{X} \in R^{p \times 2n+1}$ 에 대한 $\text{vec}(\cdot)$ 연산자는 다음과 같이 정의된다.

$$\text{vec}(\mathbf{X}) = [x_{11}, x_{21}, \dots, x_{2n+1,1}, x_{12}, \dots, x_{2n+1,2}, x_{1p}, x_{2p}, \dots, x_{2n+1,p}]^T$$

식 (18)의 해를 구하기 위해서는 $p \times 2n+1$ 정방 행렬의 역행렬 계산이 필요하며 계산량은 약 $O(8n^3 p^3)$ flop이다. 방정식 (14)의 정확한 값에 가까운 값을 얻기 위해서는 Hartley 함수 벡터의 차원을 증가시켜야 하며 이는 Stein 방정식의 차원을 매우 크게 하므로 계산량이 매우 크게 증가하게 된다.

Hartley 함수를 사용했을 때 (10)과 같이 구해진 적분 연산 행렬 \mathbf{P} 는 매우 희소한 행렬이므로 식 (18)의 $\mathbf{P}^T \otimes \mathbf{A}$ 또한 희소 행렬이다.

본 연구에서는 (17) 식의 해를 분할 방법과 행렬이 두 개의 행렬 합인 형태로 구성되었을 때 이 행렬의 역행렬을 구하는 방법을 결합하여 계산량을 줄이는 효율적인 방법을 제시한다.

미지 행렬 \mathbf{X} 와 적분 연산 행렬 \mathbf{P} 를 다음과 같이 분할한다.

$$\begin{aligned} \mathbf{X} &:= [\mathbf{X}_1 \ \mathbf{X}_2] \\ \mathbf{P} &:= \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{11} & \mathbf{P}_{12} \\ \mathbf{P}_{21} & \mathbf{P}_{22} \end{bmatrix} \\ \mathbf{Q} &:= [\mathbf{Q}_1 \ \mathbf{Q}_2] \end{aligned}$$

여기서 $\mathbf{X}_1, \mathbf{Q}_1 \in R^{p \times n+1}$, $\mathbf{X}_2, \mathbf{Q}_2 \in R^{p \times n}$, $\mathbf{P}_{11} \in R^{(n+1) \times n+1}$, $\mathbf{P}_{21} \in R^{n \times n+1}$, $\mathbf{P}_{22} \in R^{n \times n}$ 이고 \mathbf{P}_{ij} ($i=1,2 \ j=1,2$) 는 각각 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{11} &= \frac{T}{2\pi} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{n} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{n-1} \\ & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n-1} & \dots & 1 & \pi \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P}_{12} = \frac{T}{2\pi} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{1}{n} \\ 0 & 0 & \frac{1}{n-1} & 0 \\ & & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & \frac{-1}{2} & \dots & \frac{-1}{n-1} & \frac{-1}{n} \end{bmatrix} \\ \mathbf{P}_{21} &= \frac{T}{2\pi} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ & & \ddots & \vdots \\ 0 & \frac{-1}{n-1} & 0 & \frac{1}{n-1} \\ \frac{-1}{n} & 0 & \dots & 0 & \frac{1}{n} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P}_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

분할된 행렬을 이용하여 식 (17)은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$[\mathbf{X}_1 \ \mathbf{X}_2] - \mathbf{A}[\mathbf{X}_1 \ \mathbf{X}_2] \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{11} & \mathbf{P}_{12} \\ \mathbf{P}_{21} & \mathbf{P}_{22} \end{bmatrix} = [\mathbf{Q}_1 \ \mathbf{Q}_2] \quad (19)$$

여기서

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_1 &= [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n \ x_{n+1}] \\ \mathbf{X}_2 &= [x_{n+2} \ x_{n+3} \ \dots \ x_{2n} \ x_{2n+1}] \end{aligned}$$

이다.

따라서 Stein 행렬방정식 (17)은 다음과 같이 두 개의 저차 행렬방정식으로 분할 된다.

$$\mathbf{X}_1 - \mathbf{A}(\mathbf{X}_1\mathbf{P}_{11} + \mathbf{X}_2\mathbf{P}_{21}) = \mathbf{Q}_1 \quad (20)$$

$$\mathbf{X}_2 - \mathbf{A}\mathbf{X}_1\mathbf{P}_{12} = \mathbf{Q}_2 \quad (21)$$

식 (21)을 식 (20)에 대입하여 정리하면 다음과 같다.

$$\mathbf{X}_1 - \mathbf{A}\mathbf{X}_1\mathbf{P}_{11} - \mathbf{A}^2\mathbf{X}_1\mathbf{P}_{12}\mathbf{P}_{21} = \mathbf{Q}_3 \quad (22)$$

여기서 $\mathbf{Q}_3 := \mathbf{A}\mathbf{Q}_2\mathbf{P}_{21} + \mathbf{Q}_1$ 이다.

보조정리 1과 같이 Kronecker 곱을 이용하면 식 (22)의 해는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$(\mathbf{I} - \mathbf{P}_{11}^T \otimes \mathbf{A} - (\mathbf{P}_{12}^T\mathbf{P}_{21})^T \otimes \mathbf{A}^2) \text{vec}(\mathbf{X}_1) = \text{vec}(\mathbf{Q}_3) \quad (23)$$

식 (23) 역시 Hartley 함수 벡터의 차원이 증가하면 역행렬을 구하는데 계산량이 많아지게 된다. 식 (22)에서

$$\mathbf{P}_{12}\mathbf{P}_{21} = \frac{T^2}{4\pi^2} \begin{bmatrix} \frac{-1}{n^2} & 0 & \dots & \frac{1}{n^2} \\ 0 & \frac{-1}{(n-1)^2} & & \frac{1}{(n-1)^2} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{n^2} & \frac{1}{(n-1)^2} & \dots & \sum_{k=1}^n \frac{-1}{k^2} \end{bmatrix}$$

인 구조를 갖으므로 식 (23)의 계수 행렬은

$$\begin{aligned} \mathbf{I} - \mathbf{P}_{11}^T \otimes \mathbf{A} - (\mathbf{P}_{12}^T\mathbf{P}_{21})^T \otimes \mathbf{A}^2 = \\ \begin{bmatrix} \mathbf{I}_n + \frac{T^2}{4\pi^2} \frac{1}{n^2} \mathbf{A}^2 & 0 & \dots \\ 0 & \mathbf{I}_n + \frac{T^2}{4\pi^2} \frac{1}{(n-1)^2} \mathbf{A}^2 & \\ \vdots & & \ddots \\ \frac{TA}{2\pi n} - \frac{T^2\mathbf{A}^2}{4\pi^2 n^2} & \frac{TA}{2\pi(n-1)} - \frac{T^2\mathbf{A}^2}{4\pi^2(n-1)^2} & \dots \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\left[\begin{array}{c} -\frac{T}{2\pi} \frac{1}{n} \mathbf{A} - \frac{T^2}{4\pi^2} \frac{1}{n^2} \mathbf{A}^2 \\ -\frac{T}{2\pi} \frac{1}{n-1} \mathbf{A} - \frac{T^2}{4\pi^2} \frac{1}{(n-1)^2} \mathbf{A}^2 \\ \vdots \\ -\frac{T}{2\pi} \mathbf{A} - \frac{T^2}{4\pi^2} \mathbf{A}^2 \\ \mathbf{I}_n - \frac{T\mathbf{A}}{2} - \frac{T^2 \mathbf{A}^2}{4\pi^2} \sum_{k=1}^n \frac{-1}{k^2} \end{array} \right]$$

와 같이 구성되며, 여기서

$$\mathbf{Q}_3 = [g_1 \quad g_2 \quad \cdots \quad g_n \quad g_{n+1}]$$

와 같이 $\mathbf{X}_1, \mathbf{Q}_3$ 행렬을 열벡터 $x_i, g_i, i=1,2,..,n+1$ 로 표현하면 식 (23)은 다음과 같이 $n+1$ 개의 행렬 방정식으로 분할된다.

$$\left(\mathbf{I}_n + \frac{T^2}{4\pi^2 n^2} \mathbf{A}^2 \right) x_1 - \left(\frac{T}{2\pi n} \mathbf{A} + \frac{T^2}{4\pi^2 n^2} \mathbf{A}^2 \right) x_{n+1} = g_1 \quad (24)$$

$$\left(\mathbf{I}_n + \frac{T^2}{4\pi^2 (n-1)^2} \mathbf{A}^2 \right) x_2 - \left(\frac{T}{2\pi (n-1)} \mathbf{A} + \frac{T^2}{4\pi^2 (n-1)^2} \mathbf{A}^2 \right) x_{n+1} = g_2 \quad (25)$$

⋮

$$\left(\mathbf{I}_n + \frac{T^2}{4\pi^2} \mathbf{A}^2 \right) x_n - \left(\frac{T}{2\pi} \mathbf{A} + \frac{T^2}{4\pi^2} \mathbf{A}^2 \right) x_{n+1} = g_n \quad (26)$$

$$\left(\frac{T}{2\pi} \frac{1}{n} \mathbf{A} - \frac{T^2}{4\pi^2} \frac{1}{n^2} \mathbf{A}^2 \right) x_1 + \left(\frac{T}{2\pi} \frac{1}{n-1} \mathbf{A} - \frac{T^2}{4\pi^2} \frac{1}{(n-1)^2} \mathbf{A}^2 \right) x_2 + \dots + \left(\frac{T}{2\pi} \mathbf{A} - \frac{T^2}{4\pi^2} \mathbf{A}^2 \right) x_n + \left(\mathbf{I}_n - \frac{T}{2} \mathbf{A} - \frac{T^2}{4\pi^2} \sum_{k=1}^n \frac{-1}{k^2} \mathbf{A}^2 \right) x_{n+1} = g_{n+1} \quad (27)$$

(24)~(26)의 $x_i, i=1,2,..,n$ 를 (27)에 대입하면 다음과 같이 열벡터 x_{n+1} 만의 대수행렬방정식으로 구성할 수 있다.

$$\begin{aligned} & \left(\frac{T}{2\pi n} \mathbf{A} - \frac{T^2}{4\pi^2 n^2} \mathbf{A}^2 \right) \left(\mathbf{I}_n + \frac{T^2}{4\pi^2 n^2} \mathbf{A}^2 \right)^{-1} \left(\frac{T}{2\pi n} \mathbf{A} + \frac{T^2}{4\pi^2 n^2} \mathbf{A}^2 \right) x_{n+1} \\ & + \left(\frac{T}{2\pi (n-1)} \mathbf{A} - \frac{T^2}{4\pi^2 (n-1)^2} \mathbf{A}^2 \right) \left(\mathbf{I}_n + \frac{T^2}{4\pi^2 (n-1)^2} \mathbf{A}^2 \right)^{-1} g_1 \\ & + \left(\frac{T}{2\pi} \frac{1}{n-1} \mathbf{A} - \frac{T^2}{4\pi^2} \frac{1}{(n-1)^2} \mathbf{A}^2 \right) \left(\mathbf{I}_n + \frac{T^2}{4\pi^2} \frac{1}{(n-1)^2} \mathbf{A}^2 \right)^{-1} \\ & \times \left(\left(\frac{T}{2\pi} \frac{1}{n-1} \mathbf{A} + \frac{T^2}{4\pi^2} \frac{1}{(n-1)^2} \mathbf{A}^2 \right) x_{n+1} + g_2 \right) \quad (28) \\ & + \dots + \left(\frac{T}{2\pi} \mathbf{A} - \frac{T^2}{4\pi^2} \mathbf{A}^2 \right) \left(\mathbf{I}_n + \frac{T^2}{4\pi^2} \mathbf{A}^2 \right)^{-1} \left(\frac{T}{2\pi} \mathbf{A} + \frac{T^2}{4\pi^2} \mathbf{A}^2 \right) x_{n+1} \\ & + \left(\frac{T}{2\pi} \mathbf{A} - \frac{T^2}{4\pi^2} \mathbf{A}^2 \right) \left(\mathbf{I}_n + \frac{T^2}{4\pi^2} \mathbf{A}^2 \right)^{-1} g_n \\ & + \left(\mathbf{I}_n - \frac{T}{2} \mathbf{A} - \frac{T^2}{4\pi^2} \sum_{k=1}^n \frac{-1}{k^2} \mathbf{A}^2 \right) x_{n+1} = g_{n+1} \end{aligned}$$

식 (28)에서 x_{n+1} 을 구하기 위해서는 $\left(\mathbf{I}_n + \frac{T^2}{4\pi^2} \frac{1}{(k-1)^2} \mathbf{A}^2 \right)^{-1}$, $k=1,..,n$ 역행렬을 각각 구해야 한다.

식 (28)에서 $\mathbf{I}_n + \frac{T^2}{4\pi^2} \frac{1}{(k-1)^2} \mathbf{A}^2$ 의 역행렬이 존재하기 위해서는 $\mathbf{I}_n + \frac{T^2}{4\pi^2} \frac{1}{(k-1)^2} \mathbf{A}^2$ 가 정칙행렬 즉, 행렬식이 0 이 아니면 된다.

주어진 양의 정수 $n, p, p \leq n$ 에 대해 사전순서(lexicographic order)로 구성된 집합 S_i 는 다음과 같이 정의된다.

$$S_1 < S_2 < \dots < S_{\binom{n}{k}}$$

예를 들어, $n=4, p=2$ 이면 집합 S_i 는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} S_1 &= \{1,2\}, \quad S_2 = \{1,3\}, \quad S_3 = \{1,4\}, \\ S_4 &= \{2,3\}, \quad S_5 = \{2,4\}, \quad S_6 = \{3,4\} \end{aligned}$$

다음과 같은 $n \times n$ 정방행렬 \mathbf{A} 에서

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

행렬 $\mathbf{A}_{i,j}$ 를 \mathbf{A} 에서 S_i 의 원소를 행으로 하고 S_j 의 원소를 열로 하는 $p \times p$ 행렬이라 정의하자. 예를 들어 $\mathbf{A}_{2,5}$ 는 행은 $S_2 = \{1,3\}$ 이므로 \mathbf{A} 에서 1, 3행은, 열은 $S_5 = \{2,4\}$ 이므로 \mathbf{A} 의 2, 4 열을 취하여 겹치는 부분으로 행렬을 구성하면 다음과 같다.

$$\mathbf{A}_{2,5} = \mathbf{A}_{\{1,3\},\{2,4\}} = \begin{bmatrix} a_{12} & a_{14} \\ a_{32} & a_{34} \end{bmatrix}$$

행렬 \mathbf{A} 의 k 번째 복합행렬(compound matrix) $C_k(\mathbf{A})$ 는 사전순서 $S_1, S_2, \dots, S_{\binom{n}{k}}$ 로서 구성된 행렬 $\mathbf{A}_{i,j}$ 의 행렬식을 i, j 번째 요소로 하는 행렬이다. 예를 들어 $\mathbf{A} \in R^{3 \times 3}$ 일 때

$$C_k(\mathbf{A}) = \begin{bmatrix} \det(\mathbf{A}_{1,1}) & \det(\mathbf{A}_{1,2}) & \det(\mathbf{A}_{1,3}) \\ \det(\mathbf{A}_{2,1}) & \det(\mathbf{A}_{2,2}) & \det(\mathbf{A}_{2,3}) \\ \det(\mathbf{A}_{3,1}) & \det(\mathbf{A}_{3,2}) & \det(\mathbf{A}_{3,3}) \end{bmatrix}$$

와 같이 구성된다.

정방행렬 $X \in R^{n \times n}$ 의 행렬식은 n 번째 복합행렬 $C_n(X)$ 와 같으므로[10] Binet-Cauchy 정리, 즉 $C_p(AB) = C_p(A)C_p(B)$ [10]에 의해 일반적으로 $n \times n$ 정방 행렬 X 와 Y 의 합의 행렬식은 다음과 같이 복합 행렬로 표현할 수 있다.

$$\det(X+Y) = \det \left(\begin{bmatrix} X & \mathbf{I}_n \\ \mathbf{I}_n & Y \end{bmatrix} \right) = C_n \left(\begin{bmatrix} X & \mathbf{I}_n \end{bmatrix} \right) C_n \left(\begin{bmatrix} \mathbf{I}_n \\ Y \end{bmatrix} \right)$$

여기서 Y 가 단위행렬이면 아래와 같이 간단히 표현할 수 있다[10].

$$\det(X+I) = 1 + \det(X) + \sum_{i=1}^{n-1} trC_i(X)$$

여기서 $tr(\square)$ 은 행렬의 대각 합이다.

$\mathbf{I}_n + \frac{T^2}{4\pi^2} \frac{1}{(k-1)^2} \mathbf{A}^2$ 의 행렬식은 $\det(a\mathbf{A}) = a^n \det(\mathbf{A}), C_k(\lambda X) = \lambda^k C_k(X)$, (a, λ 는 실수)를 이용하면

$$\begin{aligned} \det \left(\mathbf{I}_n + \frac{T^2}{4\pi^2} \frac{1}{(k-1)^2} \mathbf{A}^2 \right) &= 1 + \det \left(\frac{T^2}{4\pi^2} \frac{1}{(k-1)^2} \mathbf{A}^2 \right) + \sum_{i=1}^{n-1} trC_i \left(\frac{T^2}{4\pi^2} \frac{1}{(k-1)^2} \mathbf{A}^2 \right) \\ &= 1 + \left(\frac{T^2}{4\pi^2} \frac{1}{(k-1)^2} \right)^n \det(\mathbf{A}^2) + \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{T^2}{4\pi^2} \frac{1}{(k-1)^2} \right)^i trC_i(\mathbf{A}^2) \end{aligned}$$

로 전개된다. 여기서 $\frac{r^2}{4\pi^2(k-1)^2}$ 는 항상 양의 수이고, $\det(\mathbf{A}^2) = \det(\mathbf{A})\det(\mathbf{A}) \geq 0$ 이므로 $\sum_{i=1}^{n-1} trC_i(\mathbf{A}^2) \geq 0$ 이면 $\det(\mathbf{I}_n + \frac{r^2}{4\pi^2(k-1)^2}\mathbf{A}^2) > 0$ 이 보장되므로 $\mathbf{I}_n + \frac{r^2}{4\pi^2(k-1)^2}\mathbf{A}^2$ 는 정칙행렬이다. 따라서 $\mathbf{I}_n + \frac{r^2}{4\pi^2(k-1)^2}\mathbf{A}^2$ 의 정칙 행렬 판별여부는 모든 $k=1,2,\dots,n$ 에 대해서 판별하지 않고 $\sum_{i=1}^{n-1} trC_i(\mathbf{A}^2) \geq 0$ 만 확인하면 된다.

다음 정리는 임의의 행렬이 두 행렬의 합으로 표현될 때 이 행렬의 역행렬을 구하는 방법이다.

정리 1 [11]: \mathbf{A} 와 $\mathbf{A}+\mathbf{B}$ 가 각각 정칙 정방행렬이고 \mathbf{B} 가 양의 계수(rank) r 을 갖으며, $\mathbf{B}=\mathbf{E}_1+\mathbf{E}_2+\dots+\mathbf{E}_r$ 와 같이 각각 계수 1을 갖는 $\mathbf{E}_i, i=1,2,\dots,r$ 의 합으로 표현된다고 하자. $\mathbf{D}_{k+1}=\mathbf{A}+\mathbf{E}_1+\dots+\mathbf{E}_k, k=1,2,\dots,r$ 인 행렬이 모든 k 에 대해서 정칙행렬이면, $\mathbf{D}_1=\mathbf{A}$ 로 놓았을 때 \mathbf{D}_{k+1} 의 역행렬은 다음과 같이 구해진다.

$$\mathbf{D}_{k+1}^{-1} = \mathbf{D}_k^{-1} - v_k \mathbf{D}_k^{-1} \mathbf{E}_k \mathbf{D}_k^{-1}, \quad k=1,2,\dots,r \tag{29}$$

여기서

$$v_k = \frac{1}{1 + tr(\mathbf{D}_k^{-1} \mathbf{E}_k)}$$

이다. ■

모든 요소가 0 이고 i 번째 대각요소만 1인 \mathbf{E}_i 정방 행렬은 계수가 1이다. 이 행렬의 합으로 단위행렬을 $\mathbf{I}_n = \mathbf{E}_1 + \dots + \mathbf{E}_n$ 와 같이 표현하면 모든 $k=1,2,\dots,n+1$ 에 대한 $\mathbf{I}_n + \frac{r^2}{4\pi^2(k-1)^2}\mathbf{A}^2$ 의 역행렬은 한번만 \mathbf{A}^2 의 역행렬을 구한 후 정리 1을 이용해서 구할 수 있다.

따라서 식 (18)의 해를 저차의 행렬방정식으로 분리하여 구하는 알고리즘은 다음과 같다.

알고리즘 1:

- Step 1: 정리 1을 이용하여 식 (28)에서 x_{n+1} 을 구한다.
- Step 2: 구해진 x_{n+1} 을 이용하여 식 (24)~(26)에서 $x_k, k=1, 2, \dots, n$ 을 구한다.
- Step 3: 위의 step 1,2에서 구한 \mathbf{X}_1 을 이용해서 식 (21)에서 \mathbf{X}_2 를 구한다.

IV. 수치 예

다음과 같은 선형 시스템을 고려하자[4]

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} -20 & -75 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

여기서 초기치는 $\mathbf{x}_0 = [1.5 \ 0.5]^T$ 이다. 단위계단 입력을 인가하였을 때 이 시스템의 해석적 해는 다음과 같다.

$$x_1(t) = \frac{103}{20} e^{-15t} - \frac{83}{20} e^{-5t}$$

$$x_2(t) = -\frac{107}{300} e^{-15t} + \frac{83}{100} e^{-5t} + \frac{1}{75}$$

Hartley 벡터 차원이 각각 $n = 10, 20, 200$ 일 때 해석적 해와 제안된 방법을 이용해 구한 해를 그림 2, 3, 4에 나타내었다.

그림 2-4에서 실선은 해석적 해를 나타내고 작은 원과 별표는 제안된 방법을 이용해서 구한 해들의 궤적을 나타낸다. Hartley 함수 벡터의 갯수가 증가할수록 제안된 방법을 이용해서 구한 해가 해석적 해에 수렴함을 알 수 있다.

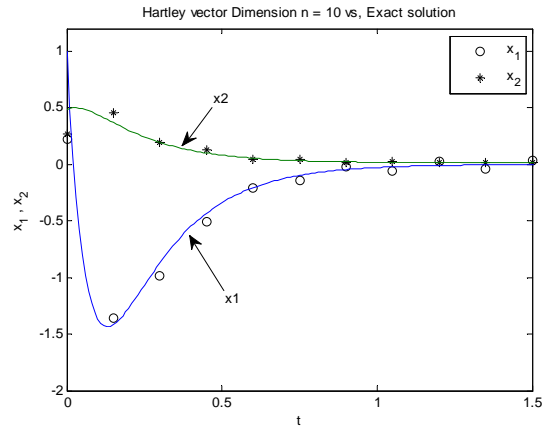


그림 2. Hartley 벡터 차원 $n=10$ 일 때 상태 변수 궤적.
Fig. 2. State trajectories at the dimension of Hartley vector is $n=10$.

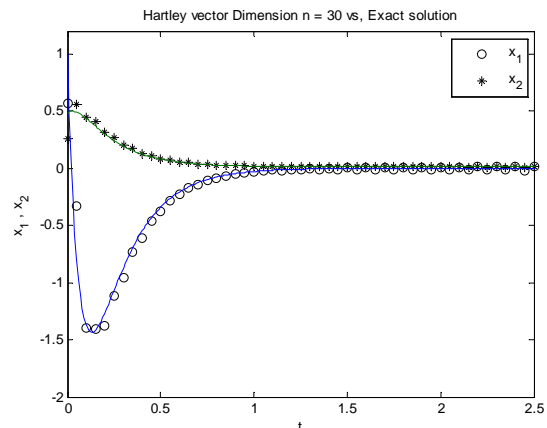


그림 3. Hartley 벡터 차원 $n=30$ 일 때 상태 변수 궤적.
Fig. 3. State trajectories at the dimension of Hartley vector is $n=30$.

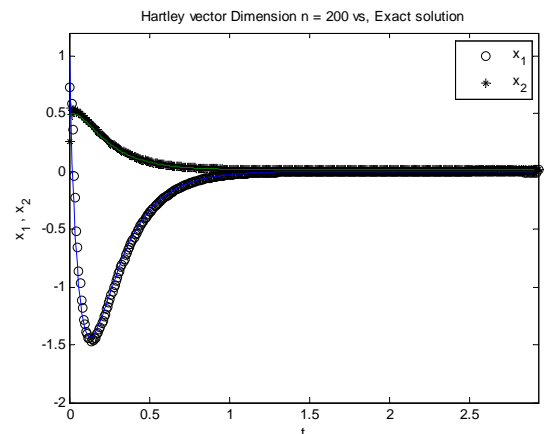


그림 4. Hartley 벡터 차원 $n=200$ 일 때 상태 변수 궤적.
Fig. 4. State trajectories at the dimension of Hartley vector is $n=200$.

따라서 [4]에서 사용된 동일한 시스템에 대해 Hartley 함수를 이용하여 구한 해는 Haar 웨이블릿을 이용하여 구한 해와 같다. 그런데 Haar 웨이블릿을 사용할 때는 해상도를 증가시키면 이에 따른 행렬의 크기가 2의 멱수로 증가하게 되나 Hartley 함수를 사용할 때는 임의의 $n \in \mathbb{N}$ 을 이용하여 Hartley 함수벡터를 구성할 수 있는 장점이 있다.

일반적으로 식 (18)과 같이 주어진 문제를 LU 분할법으로 해를 구하면 약 $O(p^3(2n+1)^3)$ flop이 필요하나, 알고리즘 1의 step 1에서는 $p^2 + p^3 + n(p^2 + 6p^3)$, step 2에서는 $n(3p^2 + p^3)$, 그리고 step 3에서는 $2p^2(n+1) + 2pn^2$ flop 이 소요된다.

알고리즘 1에서 제시된 방법과 식 (18)에서의 계산량(flops)을 $p=2, 4$ 일 때 각각 $n=50, 100, 200, 300$ 인 경우와 비교하면 다음과 같다.

n	p=2		p=4	
	LU 분할	제안된 방법	LU 분할	제안된 방법
50	8.24×10^6	1.4×10^4	6.59×10^7	4.73×10^4
100	6.49×10^7	4.8×10^4	5.19×10^8	1.34×10^5
200	5.15×10^8	1.76×10^5	4.12×10^9	4.28×10^5
300	1.73×10^9	3.84×10^5	1.38×10^{10}	8.83×10^5

V. 결론

선형 미분 방정식으로 표현된 동적 시스템을 Hartley 함수 벡터 및 적분 연산 행렬을 이용하여 미분 방정식의 문제를 대수적 문제로 변환하여 해를 구할 수 있음을 보였다. Hartley 함수 벡터의 크기가 증가하게 되면 대수 행렬 방정식인 Stein 방정식의 차수가 매우 커지게 되는데 본 연구에서 제안한 Hartley 적분 연산의 구조적 특성을 이용하여 전체 행렬방정식을 저차의 행렬 방정식들로 분리하여 계산량을 줄이면서 효율적으로 해를 구할 수 있음을 보였다.

참고문헌

[1] H. R. Marzbana and M. Razzaghi, "Solution of time-varying delay systems by hybrid functions," *Mathematics and Computers in Simulation*, vol. 64, no. 6, pp. 597-607, Mar. 2004.

[2] C. F. Chen and C. H. Hsiao, "Haar wavelet method for solving lumped and distributed-parameter systems," *IEE Proc. Control Theory and Applications*, vol. 144, no. 1, pp. 87-94, Jan. 1997.

[3] U. Lepik and E. Tamme, "Solution of nonlinear Fredholm integral equations via the Haar wavelet method," *Proc. of the Estonian Academy of Sciences, series Physics & Mathematics and Chemistry*, vol. 56, no. 1, pp. 17-27, 2007.

[4] B. S. Kim and I. J. Shim, "Study for state analysis of linear systems using Haar wavelet," *Journal of Institute of Control, Robotics and Systems (in Korean)*, vol. 14, no. 10, pp. 977-982, 2008.

[5] B. S. Kim, I. J. Shim, M. T. Lim, and Y. J. Kim, "Combined preorder and postorder traversal algorithm for the analysis of singular systems by Haar wavelets," *Mathematical Problems in Engineering*, vol. 2008, Article ID 323080

[6] J. J. Rico, E. Acha, and M. Madrigal, "The study of inrush current phenomenon using operational matrices," *IEEE Tran. on Power Delivery*, vol. 16, no. 2, pp. 231-237, Apr. 2001.

[7] L. Gelman, M. Sanderson, and C. Thompson, "Signal recognition: Fourier transform vs. Hartley transform," *Pattern Recognition*, vol. 36, no. 12, pp. 2849-2853, Apr. 2003.

[8] J. J. R. Melgoza, G. T. Heydt, A. Keyhani, B. L. Agrawal, and D. Selin, "Synchronous machine parameter estimation using the Hartley series," *IEEE Tran. on Energy Conversion*, vol. 16, no. 1, pp. 49-54, Mar. 2001.

[9] J. Brewer, "Kronecker products and matrix calculus in system theory," *IEEE Tran. on Circuits and Systems*, vol. 25, no. 9, pp. 772-781, Sep. 1978.

[10] C. Kravvaritis and M. Mitrouli, "Compound matrices: properties, numerical issues and analytical computations," *Numerical Algorithms*, vol. 50, pp. 155-177, 2009.

[11] K. S. Miller, "On the inverse of the sum of matrices," *Mathematics Magazine*, vol. 54, no. 2, Mar. 1981.



김 범 수

1987년 고려대학교 전기공학과. 1989년 고려대학교 대학원 전기공학과(공학석사). 2002년 고려대학교 대학원 전기공학과(공학박사). 1989년~1998년 LG산전 연구소 선임연구원. 2005년~현재 경상대학교 해양산업연구소 연구원, 경상대학교 기계시스템공학과 부교수.



민 치 현

2006년 경상대학교 전기공학과 졸업. 2008년 경상대학교 전기공학과 졸업(공학석사). 현재 경상대학교 기계시스템공학과 박사과정.