

# 입력 지연을 갖는 이산시간 선형 시스템을 위한 예측기 피드백의 지수적 안정성

## Exponential Stability of Predictor Feedback for Discrete-Time Linear Systems with Input Delays

최 준 영\*

(Joon-Young Choi<sup>1</sup>)

<sup>1</sup>Department of Electronics Engineering, Pusan National University

**Abstract:** We consider discrete-time LTI (Linear Time-Invariant) systems with constant input delays. The input delay is modeled by a first-order PdE (Partial difference Equation) and a backstepping transformation is employed to design a predictor feedback controller. The backstepping approach results in the construction of an explicit Lyapunov function, with which we prove the exponential stability of the closed-loop system formed by the predictor feedback. The numerical example demonstrates the design of the predictor feedback controller, and illustrates the validity of the exponential stability.

**Keywords:** delay systems, predictor, backstepping transformation, exponential stability

### I. 서론

[1-13]에서는 연속시간 선형 시불변 시스템의 상수 입력 지연을 보상하기 위하여 예측기 피드백을 이용하는 다양한 제어 방법이 제안되었고, 이러한 제어 방법들은 제어 대상이 불안정하고 임의 크기의 입력 지연을 갖는 경우에도 성공적으로 제어 목표를 달성하였다. 특히 [10,11]에서는 입력 지연을 1차 PDE (Partial differential Equation)으로 모델링하고 예측기 피드백 제어를 백스테핑 변환을 통하여 설계하였다. 이러한 백스테핑 기반 설계 방법은 명시적인 리아프노프 함수의 구성을 가능하게 하고 전체 닫힌 루프 시스템에 대하여 점근적 안정성이 아닌 지수적 안정성을 보장한다.

한편 [14,15]에서는 상태 변수 예측을 기반으로 입력 지연을 갖는 이산시간 선형 시불변 시스템을 위한 예측기 피드백 제어기가 제안되었다. [16]에서는 시변 입력 지연을 갖는 이산 시간 선형 시불변 시스템에서 지연 불일치를 보상하기 위하여 예측기 피드백 제어기가 사용되었다. 그러나 [15,16]의 안정성 해석에서는 예측된 미래의 상태 변수가 지수적으로 안정하다는 것이 증명되었고 명시적인 리아프노프 함수를 기반으로 현재의 상태변수가 지수적 안정하다는 것을 증명하는 연구 결과는 현재까지 발표되고 있지 않다.

본 논문에서는 상수 입력 지연을 갖는 이산시간 선형 시불변 시스템을 위한 예측기 피드백 제어기를 설계하고 [10, 11]에서 제안된 방법을 이용하여 전체 닫힌 루프 시스템의

광역 지수적 안정성을 증명한다. 입력 지연을 1차 PdE로 모델링하고 백스테핑 변환을 적용하여 예측기 피드백 제어기를 설계하고 전체 닫힌 루프 시스템의 지수적 안정성 증명을 가능하게 하는 리아프노프 함수를 구성하여 현재 상태 변수의 광역 지수적 안정성을 증명한다.

기호 설명:  $i < j$ 를 만족하는 정수  $i, j$ 에 대하여 집합  $I_{[i,j]}$ 는  $I_{[i,j]} = \{i, i+1, \dots, j\}$ 와 같이 정의된다. PdE의 상태변수는  $u_i(k)$ 로 나타내고  $k \in Z$ 는 이산시간 변수,  $i \in I_{[0,D]}$ 는 공간변수를 의미한다. 유한 차원 벡터  $X$ 의 2-norm은  $\|X\|$ 로 나타낸다.  $\lambda_{\min}(M)$ 과  $\lambda_{\max}(M)$ 는 각각 행렬  $M$ 의 최소 고유치와 최대 고유치를 나타낸다.

### II. 문제의 정형화

다음과 같은 이산시간 선형 시불변 시스템을 고려한다.

$$X(k+1) = AX(k) + BU(k-D) \quad (1)$$

위식에서  $X(k) \in R^n$ 은 상태 변수,  $(A, B)$ 는 제어 가능한 시스템, 입력 신호  $U(k) \in R$ 는  $D$  이산시간동안 지연되어 시스템에 입력되는 것을 나타낸다. (1)에서 입력지연이 없을 때 즉  $D=0$  일 때 시스템을 안정화 시키는 정적 상태변수 피드백 제어기  $U(k) = KX(k)$ 가 설계되어  $A+BK$ 가 Schur 안정성 특성을 만족한다고 가정한다. 이러한 가정 하에 다음과 같은 제어 입력을 얻을 수 있다면 입력 지연이 존재하는 경우에도 닫힌 루프 시스템은 안정화 될 수 있다.

$$U(k-D) = KX(k) \quad (2)$$

위의 제어 입력은 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$U(k) = KX(k+D) \quad (3)$$

\* 책임저자(Corresponding Author)

Manuscript received April 24, 2013 / revised May 16, 2013 / accepted May 29, 2013

최준영: 부산대학교 전자공학과(jyc@pusan.ac.kr)

※ 이 과제는 2012년도 부산대학교 교수국외장기과연 지원비에 의하여 연구되었음.

그러나 위의 제어 입력은 미래의 상태 변수가 필요하기 때문에 실제로 구현이 불가능하고 이러한 문제를 극복하기 위하여 [14,15]에서는 다음과 같은 상태변수 예측기가 제안되었다.

$$X(k+D) = A^D X(k) + \sum_{j=k-D}^{k-1} A^{k-j-1} B U(j) \quad (4)$$

이러한  $D$  이산시간 앞선 예측기를 이용하면 다음과 같은 구현 가능한 예측기 피드백 제어를 설계할 수 있다.

$$U(k) = K \left[ A^D X(k) + \sum_{j=k-D}^{k-1} A^{k-j-1} B U(j) \right] \quad (5)$$

다음 장에서는 1차 PdE를 이용한 입력 지연 모델을 기반으로 (5)와 같은 제어기를 유도할 것이다. 이러한 접근 방법은 [14,15]의 접근 방법과 비교할 때 더욱 수학적으로 복잡하지만 전체 닫힌 루프 시스템의 지수적 안정성을 증명할 수 있는 명시적 리아프노프 함수를 구성할 수 있는 장점이 있다.

### III. 예측기 피드백 제어기의 설계

입력 지연을 모델링하기 위한 1차 PdE의 상태변수를 다음과 같이 선택한다.

$$u_i(k) = U(k+i-D), \quad i \in I_{[0,D]} \quad (6)$$

위의 식에서  $u_0(k) = U(k-D)$ 와  $u_D(k) = U(k)$ 로 표현되는 경계 조건을 얻을 수 있다. 이러한 입력 지연 모델의 상태 변수를 (1)에 적용하면 시스템 (1)은 다음과 같이 나타낸다.

$$\begin{aligned} X(k+1) &= AX(k) + Bu_0(k) \\ u_i(k+1) &= u_{i+1}(k), \quad i \in I_{[0,D-1]} \\ u_D(k) &= U(k) \end{aligned} \quad (7)$$

위의 식은 PdE의 경계 조건으로부터 얻어지는 입력  $U(k)$ 로 구동되는 OdE (Ordinary difference Equation)-PdE 연결 형태를 형성한다. 이제 [17]에서 제안된 연속시간 백스테핑 변환과 유사하도록 다음과 같은 이산시간 백스테핑 변환을 고려한다.

$$w_i(k) = u_i(k) - \sum_{j=0}^{i-1} q_{i-1,j} u_j(k) - \gamma_i^T X(k) \quad (8)$$

위의 식에서  $q_{i-1,j}$ 는  $i$ 와  $j$ 의 함수이고 아래의 유도 과정에서 결정될 것이다. 백스테핑 변환 (8)을 도입한 이유는 백스테핑 변환 (8)을 통하여 원래 시스템 (7)을 다음과 같은 목표 시스템으로 변환시키기 위한 것이다.

$$\begin{aligned} X(k+1) &= AX(k) + Bw_0(k) \\ w_i(k+1) &= w_{i+1}(k), \quad i \in I_{[0,D-1]} \\ w_D(k) &= 0 \end{aligned} \quad (9)$$

목표 시스템 (9)를 만족시키는 백스테핑 변환 (8)을 구하기 위하여 (8)에서 시간과 공간변수가 한 단계 앞선  $w_i(k+1)$ 와  $w_{i+1}(k)$ 를 계산하면 다음과 같은 결과를 얻

을 수 있다.

$$w_i(k+1) = u_{i+1}(k) - \sum_{j=1}^i q_{i-1,j-1} u_j(k) - \gamma_i^T [AX(k) + Bu_0(k)] \quad (10)$$

$$w_{i+1}(k) = u_{i+1}(k) - q_{i,0} u_0(k) - \sum_{j=1}^i q_{i,j} u_j(k) - \gamma_{i+1}^T X(k) \quad (11)$$

목표 시스템 (9)의 두 번째 식을 만족하기 위해서는 (10)식에서 (11)식의 양변을 빼면 얻을 수 있는 다음 식이 성립하여야 한다.

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^i [q_{i,j} - q_{i-1,j-1}] u_j(k) + [q_{i,0} - \gamma_i^T B] u_0(k) \\ + [\gamma_{i+1}^T - \gamma_i^T A] X(k) = 0 \end{aligned} \quad (12)$$

위의 식은 임의의  $u_j(k)$ 와  $X(k)$ 에 대하여 성립하여야 하므로 다음과 같이 세 개의 식이 만족되어야 한다.

$$\begin{aligned} q_{i,j} &= q_{i-1,j-1} \\ q_{i,0} &= \gamma_i^T B \\ \gamma_{i+1}^T &= \gamma_i^T A \end{aligned} \quad (13)$$

위의 처음 두 식은 PdE 형태이고 세 번째 식은 단순한 OdE 형태이다. OdE의 초기 조건을 얻기 위하여 (8)에서  $i=0$ 으로 설정하면  $w_0(k) = u_0(k) - \gamma_0^T X(k)$ 를 얻을 수 있고 이 식을 (9)의 첫 번째 식에 대입하면 다음 식을 얻을 수 있다.

$$X(k+1) = AX(k) + Bu_0(k) + B(K - \gamma_0^T) X(k) \quad (14)$$

(14)와 (7)의 첫 번째 식을 비교하면  $\gamma_0 = K^T$ 를 얻을 수 있고 (13)의 세 번째 OdE는 다음과 같은 해를 갖는다.

$$\gamma_i^T = KA^i \quad (15)$$

(13)의 첫 번째 식의 일반해는  $q_{i,j} = \phi(i-j)$ 로 주어지고 함수  $\phi$ 는 (13)의 두 번째 식과 (15)를 이용하면 다음과 같이 구하여 진다.

$$q_{i,j} = KA^{i-j} B \quad (16)$$

다음으로 (15)와 (16)을 (8)에 대입하면 다음과 같은 백스테핑 변환이 결정된다.

$$w_i(k) = u_i(k) - K \sum_{j=0}^{i-1} A^{i-j-1} B u_j(k) - KA^i X(k) \quad (17)$$

위식에서  $i=D$ 로 설정하고 (9)의 세 번째 경계 조건을 적용하면 다음과 같은 제어 입력을 얻을 수 있다.

$$u_D(k) = K \sum_{j=0}^{D-1} A^{D-j-1} B u_j(k) + KA^D X(k) \quad (18)$$

한편 (7)의 두 번째와 세 번째 식을 이용하면 PdE 상태 변수로 표현된 위의 제어 입력은 원래 시스템의 입력  $U(k)$ 로 표현될 수 있고 다음과 같이 구하여 진다.

$$U(k) = K \left[ A^D X(k) + \sum_{j=k-D}^{k-1} A^{k-j-1} B U(j) \right] \\ = K \left[ A^D X(k) + \sum_{j=0}^{D-1} A^{D-j-1} B U(k-D+j) \right] \quad (19)$$

위의  $U(k)$ 로 표현된 제어 입력은 (5)의 예측기 피드백 제어 입력과 일치하므로 PdE 입력 지연 모델과 백스테핑 변환을 기반으로 설계한 제어기도 기존의 예측기 피드백 제어기와 같은 제어 입력을 생성하는 것을 알 수 있다.

#### IV. 안정성 해석

다음 정리를 통하여 명시적 리아프노프 함수를 구성하고 제어 입력 (19)를 시스템에 적용하였을 때 닫힌 루프 시스템의 지수적 안정성을 보인다.

정리 1: 제어 대상 시스템 (7)에 제어 입력 (19)를 적용하면 다음과 같이 정의되는 norm을 기준으로 전체 닫힌 루프 시스템은 광역 지수적으로 안정하다.

$$\left( |X(k)|^2 + \sum_{j=0}^{D-1} u_j^2(k) \right)^{1/2} \quad (20)$$

증명: 우선 목표시스템 (9)가 지수적으로 안정하다는 것을 보이기 위하여 양의 상수  $\lambda$ 에 대하여 다음과 같은 리아프노프 함수를 고려한다.

$$L(k) = \sum_{j=0}^{D-1} \lambda^j w_j^2(k) \quad (21)$$

위의 식에서  $\lambda$ 는 차후 값이 결정될 것이며 (9)의 두 번째와 세 번째 식을 이용하면 (21)의 순방향 차이는 다음과 같이 유도된다.

$$\Delta L(k) = L(k+1) - L(k) \\ = \sum_{j=0}^{D-1} \lambda^j [w_{j+1}^2(k) - w_j^2(k)] \\ = -\frac{1}{\lambda} w_0^2(k) - \frac{\lambda-1}{\lambda} \sum_{j=0}^{D-1} \lambda^j w_j^2(k) \quad (22)$$

(22)에서  $\lambda > 1$ 을 만족하도록  $\lambda$ 를 선택하고 양의 상수  $\eta$ 를 다음과 같이 선택한다.

$$0 < \eta < \min \left\{ \frac{1}{\lambda}, \frac{\lambda-1}{\lambda} \right\} < 1 \quad (23)$$

(23)을 (22)에 적용하면 다음과 같이 순방향 차이의 상계를 얻을 수 있다.

$$\Delta L(k) < \eta w_0^2(k) - \eta L(k) \quad (24)$$

이제 전체 닫힌 루프 시스템의 리아프노프 함수를 다음과 같이 선택한다.

$$V(k) = X^T(k) P X(k) + \frac{a+b}{2\eta} L(k) \quad (25)$$

위의 식에서  $P = P^T > 0$ 는 주어진  $Q = Q^T > 0$ 에 대한 리아프노프 방정식  $(A+BK)^T P (A+BK) - P = -Q$ 의 해이고 매개변수  $a$ 와  $b$ 는 추후에 결정될 것이다. (25)의 순방

향 차이의 상계를 유도하기 위하여 Young's inequality로부터 얻어지는 다음 식이 필요하다.

$$\left| 2X^T(k)(A+BK)^T P B w_0(k) \right| \\ \leq \frac{2}{b} \left| X^T(k)(A+BK)^T P B \right|^2 + \frac{b}{2} w_0^2(k) \quad (26)$$

위의 부등식을 이용하면 (25)의 순방향 차이의 상계는 다음과 같이 유도된다.

$$\Delta V(k) = V(k+1) - V(k) \\ \leq -X^T(k) Q X(k) + \left| B^T P B \right| w_0^2(k) \\ + \frac{2}{b} \left| X^T(k)(A+BK)^T P B \right|^2 - \frac{a}{2} w_0^2(k) \\ - \frac{a+b}{2} L(k) \quad (27)$$

위의 식에서 매개변수  $a$ 와  $b$ 를  $a = 2 \left| B^T P B \right|$ ,  $b = 4 \lambda_{\max} \left( (A+BK)^T P B B^T P (A+BK) \right) / \lambda_{\min} (Q)$ 로 선택하면 (27)은 다음과 같이 전개된다.

$$V(k+1) - V(k) \leq -\mu V(k) \quad (28)$$

위의 식에서  $\mu = \min \left\{ \frac{\lambda_{\min} (Q)}{2 \lambda_{\max} (P)}, \eta \right\}$ 이고 (23)으로부터  $\mu$ 는  $0 < \mu < 1$ 를 만족한다. 따라서 닫힌 루프 시스템은  $\left( |X(k)|^2 + \sum_{j=0}^{D-1} w_j^2(k) \right)^{1/2}$  norm을 기준으로 할 때 지수적으로 안정하다는 것이 증명된다.

한편 (10)에서 (16)까지의 전개 과정을 이용하면 (8)의 백스테핑 역변환을 다음과 같이 구할 수 있다.

$$u_i(k) = w_i(k) + K \sum_{j=0}^{i-1} (A+BK)^{i-j-1} B w_j(k) \\ + K (A+BK)^i X(k) \quad (29)$$

(17)과 (29)을 이용하면 닫힌 루프 시스템의  $\left( |X(k)|^2 + \sum_{j=0}^{D-1} w_j^2(k) \right)^{1/2}$  norm에 관한 지수적 안정성으로부터  $\left( |X(k)|^2 + \sum_{j=0}^{D-1} u_j^2(k) \right)^{1/2}$  norm에 관한 지수적 안정성을 쉽게 증명할 수 있다[17]. ■

#### V. 모의실험

모의실험을 위하여 다음과 같이 입력 지연을 갖는 2차의 열린 루프 불안정 시스템을 고려한다.

$$X(k+1) = \begin{bmatrix} 1.2 & 0.1 \\ 0.5 & 1.3 \end{bmatrix} X(k) + \begin{bmatrix} 1.1 \\ 0.7 \end{bmatrix} U(k-D) \quad (30)$$

위 시스템의 고유치는  $\{1.0209, 1.4791\}$ 로 계산이 되며 제어 입력 (19)를 설계하기 위한 피드백 이득은  $K = [-0.5798, -0.6603]$ 로 선택하였다. 이러한 피드백 이득은  $A+BK$ 의 고유치를  $\{0.7 \pm 0.2j\}$ 로 할당하고 입력 지연이 없는 경우 닫힌 루프 시스템이 지수적으로 안정하게 된다. 초기 상태 변수는  $X(0) = [1 \ -1]^T$ 로 설정하고 입력 지연 값은

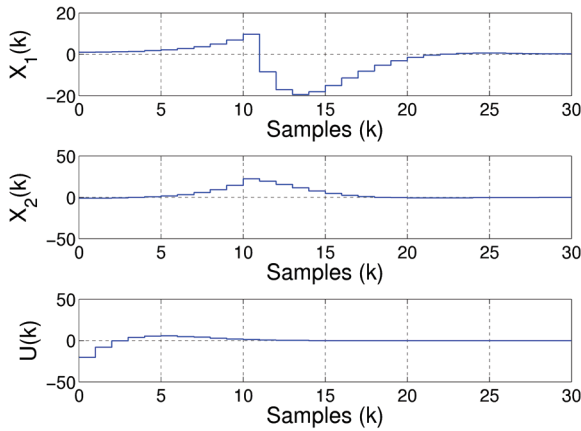


그림 1. 시스템 입력 및 상태 변수.

Fig. 1. System input and states.

$D=10$ 으로 설정하였다. 그림 1의 모의실험 결과는 예측기 피드백 제어기 (19)를 적용한 전체 닫힌 루프 시스템은 지수적으로 안정하다는 것을 예증하고 있다.

## VI. 결론

1차 PdE를 이용한 입력 지연 모델과 백스테핑 변환을 적용하여 입력 지연을 갖는 이산시간 선형 시불변 시스템을 위한 예측기 피드백 제어기를 설계하고 명시적인 리아프노프 함수를 구성하였다. 기존의 예측기 기반 제어기의 안정성 해석 방법과 달리 명시적인 리아프노프 함수를 기반으로 전체 닫힌 루프 시스템의 광역 지수적 안정성을 증명하였다. 이러한 리아프노프 함수 기반 해석 방법은 향후 시스템 모델의 불확실성, 외란, 시변 지연을 포함한 시스템에 대한 예측기 기반 제어기의 강인성 해석을 용이하게 할 것으로 기대된다.

## REFERENCES

[1] A. Z. Manitius and A. W. Olbrot, "Finite spectrum assignment for systems with delays," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 24, pp. 541-553, 1979.

[2] W. H. Kwon and A. E. Pearson, "Feedback stabilization of linear systems with delayed control," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 25, pp. 266-269, 1980.

[3] Z. Artstein, "Linear systems with delayed controls: a reduction," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 27, pp. 869-879, 1982.

[4] K. Watanabe, "Finite spectrum assignment and observer for multivariable systems with commensurate delays," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 31, pp. 543-550, 1996.

[5] S.-I. Niculescu, *Delay Effects on Stability*, Springer, New York, 2001.

[6] S. Mondie and W. Michiels, "Finite spectrum assignment of unstable time-delay systems with a safe implementation," *IEEE Transactions on Automatic Control*,

vol. 48, pp. 2207-2212, 2003.

- [7] M. Jankovic, "Forwarding, backstepping, and finite spectrum assignment for time delay systems," *Proc. of Amer. Control Conference*, 2006, pp. 5618-5624.
- [8] Q.-C. Zhong, *Robust Control of Time-Delay Systems*, Springer, New York, 2006.
- [9] W. Michiels and S.-I. Niculescu, *Stability and Stabilization of Time-Delay Systems: An Eigenvalue-Based Approach*, Singapore: SIAM, 2007.
- [10] M. Krstic and A. Smyshlyaev, "Backstepping boundary control for first-order hyperbolic PDEs and application to systems with actuator and sensor delays," *Systems & Control Letters*, vol. 57, pp. 750-758, 2008.
- [11] M. Krstic, "Lyapunov tools for predictor feedbacks for delay systems: Inverse optimality and robustness to delay mismatch," *Automatica*, vol. 44, pp. 2930-2935, 2008.
- [12] J.-H. Cho and H.-S. Hwang, "Design of hybrid smith-predictor fuzzy controller using reduction model," *Journal of Control, Automation, and Systems Engineering (in Korean)*, vol. 13, no. 5, pp. 444-451, 2007.
- [13] H.-C. Yi, Y.-J. Kim, and J.-Y. Choi, "Networked control system using RTT measurement over USN," *Journal of Control, Automation, and Systems Engineering (in Korean)*, vol. 18, no. 11, pp. 1040-1044, 2012.
- [14] G. C. Goodwin and K. Sang sin, *Adaptive Filtering Prediction and Control*, Information and System Science Series, Prentice Hall, 1984.
- [15] R. Lozano, P. Castillo, P. Garcia, and A. Dzul, "Robust prediction-based control for unstable delay systems: Application to the yaw control of a mini-helicopter," *Automatica*, vol. 40, pp. 603-612, 2004.
- [16] A. Gonzalez, A. Sala, and P. Albertos, "Predictor-based stabilization of discrete time-varying input-delay systems," *Automatica*, vol. 48, pp. 454-457, 2012.
- [17] M. Krstic, *Delay Compensation for Nonlinear, Adaptive, and PDE Systems*, 1st Ed., Birkh'auser Boston, 2009.



최준영

1994년 포항공과대학교 전자전기공학과 졸업. 1996년 동 대학원 석사. 2002년 동 대학 박사. 현재 부산대학교 전자전기공학부 부교수. 관심 분야는 임베디드 시스템, 제어 시스템.