

유한요소법을 이용한 자성유체의 거동예측을 위한 수치적 모델링

서재형

동아대학교 기계공학과 대학원, 부산시 사하구 하단동 840, 604-714

이무연* · 서이수

동아대학교 기계공학과, 부산시 사하구 하단동 840, 604-714

(2013년 1월 11일 받음, 2013년 1월 24일 최종수정본 받음, 2013년 1월 25일 게재확정)

본 연구에서는 나노입자 크기를 가지는 강자성체 미립자로 구성된 자성유체의 거동을 예측할 수 있는 수학적 모델링을 유한요소법(Finite element method)을 이용하여 수치적으로 접근하였다. 이를 위하여 뉴턴유체의 거동을 예측하는 지배방정식과 함께 자기력에 반응하는 강자성체의 거동을 예측하기 위한 Maxwell 자장 방정식 및 자성입자의 회전효과를 풀 수 있는 자화의 구성방정식을 추가로 고려하였다. 더불어 유한요소법을 이용하여 각 방정식을 이산화하고 속도와 온도의 경계조건을 이용하여 자성유체의 거동을 예측하였다. 본 모델링의 적합성을 검증하기 위하여 Davis(1983) 및 Fusegi et al.(1991)의 연구결과와 비교하였고, 각각 5.5 % 및 2.7 % 범위에서 비교적 정확하게 예측되었다.

주제어 : 거동, 유한요소법, 자성유체, Nusselt 수

I. 서 론

자성유체는 Papell에 의하여 1960년대 소개되면서부터 자성유체는 자기장의 방향 및 강도에 의하여 열-유동 거동을 제어할 수 있으며, 뉴턴유체와는 유사하지만 다른 물리적 거동 특성을 보이는 점으로 인하여 많은 사람들로 부터 연구의 대상이 되었다[1, 2]. Tanahashi et al.(1983) 및 Kawai et al.(1990)의 연구논문을 보면, 그들은 비압축성 유체에 대하여 향상된 GSMAC(Generalized simplified marker and cell method)법을 적용한 수치해석법에 대하여 설명하였고 자성유체를 비압축성유체로 해석할 수 있는 수치해석법에 대하여 설명하였다[3, 4]. 따라서 본 연구에서는 이들이 제시한 GSMAC 법을 근간으로 하여 정육면체에 채워진 자성유체에 대하여 유한요소법을 적용하여 수학적 모델링을 제시하고, 타 연구자들과의 검증을 통하여 본 모델링의 타당성을 입증하고자 한다.

II. 해석모델

본 연구에서 사용된 해석모델은 Fig. 1과 같다. 가로, 세로, 높이가 각각 L인 정육면체는 자성유체로 채워져 있으며, 중력의 영향을 받고 있다. 해석 시 사용한 초기 온도, 속도 및

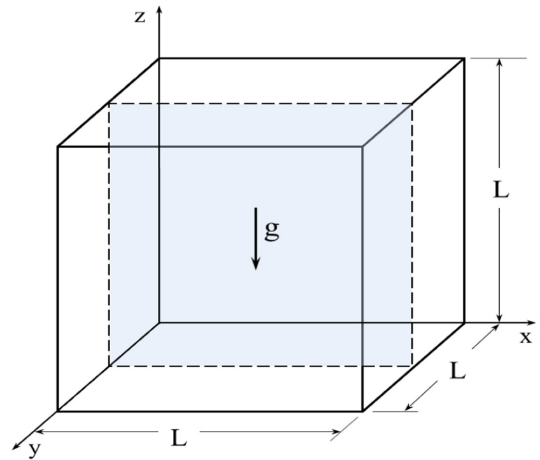


Fig. 1. (Color online) Physical model and boundary conditions for numerical analysis of magnetic fluid.

입력 조건은 식(1)과 같으며, 정육면체의 x-방향 앞면과 뒷면은 저온(cold)으로 가정하고, y-방향 앞면과 뒷면은 단열(adiabatic)로 가정하였으며, z-방향 앞면과 뒷면은 각각 저온(cold) 조건 및 고온(hot) 조건으로 가정하였다. 초기조건으로는 정육면체의 y-방향 및 z-방향 속도 조건은 no-slip으로 가정하였다. 자성유체는 Kamiyama et al.(1983)[5]에 의해 제시된 것을 사용하였고 물성치는 Table I에 나타내었다. 자성유체의 비열, 체적팽창계수 및 열전도율에 관해서는 본 연구에 있어서는 모액의 물성치와 같은 값으로 가정한다.

Table I. Thermodynamic properties of magnetic fluid.

Properties	W-40
Effective radius of particle, a_m (nm)	5.5
Density, ρ (kg/m ³)	1.37×10^3
Density of particle, ρ_a (kg/m ³)	5.16×10^3
Saturation magnetization (Wb/m ²)	0.36
Vortex viscosity of particle, η_1 (Pa·s)	2.18×10^{-3}
Viscosity, η (Pa·s)	1.06×10^{-2}
Volume concentration of particle, ϕ_a	8.68×10^{-2}
Particle number per unit volume, N (EA/m ³)	1.25×10^{23}
Average moment of inertia per unit volume, I	1.1×10^{-14}
Boltzmann constant, k (J/K)	1.38×10^{-23}

III. 수치해석

1. 물리적 가정

본 연구에서 자성유체를 구성하고 있는 입자들의 내부회전을 고려하여 비전도성 자성유체의 거동을 예측하기 위한 수치해석을 진행하였다. 일반유체와 구별되는 자성유체의 유동 특성을 예측하기 위하여 물리적 가정과 함께 지배방정식을 유도하였다. 특히, 일반유체에서 온도차이가 존재할 때 발생하는 밀도차이에 의한 부력과

$$u_{all\ sides} = 0, v_{all\ sides} = 0, p = 0$$

$$t_{x=0} = T_{x=L} = T_{z=L} = T_{cold} \quad (1)$$

$$T_z = 0 = T_{hot}$$

$$T_{y=0} = T_{y=L} = T_{adiabatic}$$

자성유체가 자기장에 반응하여 발생하는 부력의 일종인 자기체적력을 고려하기 위하여 수치해석 시 액체 내 온도차에 의한 밀도변화는 부력항에만 작용하고 이외의 밀도변화는 무시하는 Boussinesq 근사를 가정하였다[6]. 즉 Boussinesq 근사 이론에 따라 밀도는 온도만의 함수로 고려하였다. 내부에 작용하는 외력은 중력만을 고려하였으며, 열전도율은 등방성으로 가정하였다. 또한, 해석모델에 가해지는 자장은 균일자장으로 간주하였고 자장변화량은 무시하여 지배방정식을 다음과 같이 유도하였다. 여기서 v 및 T 는 해석모델의 벽면에서의 속도 및 온도를 의미한다.

2. 지배방정식

앞서 언급한 가정들과 함께, 자성유체의 각운동량 방정식, 자성유체의 자화방정식 및 자장방정식은 다음과 같다[7].

$$I \frac{d\Omega}{dt} = (\alpha_m + \beta_m) \nabla \cdot (\nabla \cdot \Omega) + \gamma_m \nabla^2 \Omega + \mathbf{M} \times \mathbf{H} - 4\eta_1 (\Omega - \omega) + \rho I \quad (2)$$

$$\mathbf{M} = \chi_m (I - \tau \Omega \cdot \boldsymbol{\varepsilon}) \cdot \mathbf{H} \quad (3)$$

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} + \mathbf{M} \quad (4)$$

여기서, I 는 단위체적당 평균 관성모멘트, Ω 는 입자의 회전각 속도벡터, t 는 시간, $\alpha_m, \beta_m, \gamma_m$ 는 스핀점성계수, \mathbf{M} 는 자화벡터, \mathbf{H} 는 자장벡터, η_1 는 분산입자의 와점성계수, ω 는 유체의 회전각속도벡터, ρ 는 밀도, I 는 단위질량당 체적우력벡터, χ_m 는 자화율, I 는 Idemfactor, τ 는 유체마찰에 의한 회전운동의 완화시간, $\boldsymbol{\varepsilon}$ 는 Levi-civita의 기호, \mathbf{B} 는 자속밀도 벡터, μ_0 는 진공의 투자율이다. 여기서, 자성유체의 입자 회전($\nabla \cdot \Omega = 0$)을 고려하면, 식(2)은 다음과 같이 정리된다.

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{1}{Re} \left(\nabla^2 \Omega - 4\epsilon \lambda_i^2 (\Omega - \omega) + \frac{4\epsilon \lambda_i^2 \sigma}{Pe_r} \mathbf{M} \times \mathbf{H} \right) \quad (5)$$

여기서, Re 는 Reynolds 수, Pe_r 는 회전 Plect 수, 치수효과 파라미터는 $\lambda_i = L_r / i$ 이고, L_r 은 특성길이, i 는 자성유체입자의 체적평균 관성반경으로 1×10^{-9} m이다. λ_i 는 우변의 2항 및 3항과 비교하여 매우 작기 때문에 무시하면, 식(5)는 다음과 같이 정리된다[8].

$$\Omega = \omega + \mathbf{M} \times \mathbf{H} / 4\eta_1 \quad (6)$$

즉, 식(3)을 식(6)에 대입하여 \mathbf{M} 을 소거하면 입자의 각운동량 방정식은 식(7)과 같은 형태를 가진다.

$$\Omega = \omega - M_0 \tau H \Omega / 4\eta_1 \quad (7)$$

식(7)을 이용하여 자성유체의 입자회전을 고려한 물리적 거동을 예측하기 위한 지배방정식을 유도할 수 있으며 연속방정식, 운동량방정식, 에너지방정식 및 자화구성 방정식을 식(8)에서 식(11)과 같은 형태를 가진다.

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (8)$$

$$\rho_r \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla p + \nabla \cdot (\mu \nabla \mathbf{v}) + \nabla \cdot (\eta \nabla \vec{\omega}) + \mathbf{M} \cdot \nabla \mathbf{H} - \nabla \times \left(\frac{2\eta_1 M_0 \tau H}{4\eta_1 + M_0 \tau H} \omega \right) + \rho_r \beta (T - T_r) \mathbf{e} \quad (9)$$

$$\rho C_p \frac{dT}{dt} = \nabla \cdot (\kappa \nabla T) \quad (10)$$

$$\mathbf{M} = \chi_m \left(\mathbf{H} - \frac{4\eta_1 \tau}{4\eta_1 + M_0 \tau H} \mathbf{H} \times \omega \right) \quad (11)$$

여기서, σ 는 자성효과 파라미터, M_0 는 평형 자화의 세기, H 는 자장의 세기, v 는 속도벡터, ρ 는 자성유체 밀도 대표량, p 는 압력, η 는 자성유체의 점성계수, β 는 체적팽창계수, T 는 온도, T_r 는 온도 대표량, \mathbf{e} 은 중력가속도 방향의 단위벡터, C_p 는 정압비열, κ 는 열전도율이다.

3. 해석방법

본 연구에서는 수치해석 방법으로 Kato(1990)에 의해서 개발된 GSMAC 유한요소법을 이용하였다[9]. 이 방법은 Fractional-step법의 원리를 이용하여 유동장의 직교성분과 사이클 오차의 자기조정법을 이용하여 압력과 속도의 수정 반복계산을 이용하는 것이다. 즉 자성유체의 지배방정식에 GSMAC법을 적용하면 식(12)에서 식(18)로 정리된다.

$$\omega^n = \frac{1}{2} \nabla \times v^n \tag{12}$$

$$M^n = \chi_m^n (H - A_1^n P_e r H \times \omega^n) \tag{13}$$

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{v} - v^n}{\Delta t} = & -\nabla P^n + 2v^n \times \omega^n - \frac{2\varepsilon}{Re} \nabla \times (A_1^n \sigma M_0^n H \omega^n) \\ & + \frac{1}{Re} (\nabla \cdot (\eta^n \nabla v^n) + \nabla \cdot (\eta^n v^n \vec{\nabla})) \\ & + \frac{4\varepsilon \sigma}{Re Pe_r} M^n \cdot \nabla H + \frac{Gr}{Re^2} \beta^n T^n e \end{aligned} \tag{14}$$

$$\nabla \cdot v^k - \nabla^2 \phi^k = -\frac{1}{\lambda} \cdot \frac{\phi^{k+1} - \phi^k}{\nabla \tau} \tag{15}$$

$$\frac{v^{k+1} - v^k}{\nabla t} = -\nabla P^{k*} \tag{16}$$

$$P^{k+1} = P^k + P^{k*} \tag{17}$$

즉, 관계식을 풀기 위한 경계조건인 속도 및 온도 경계조건들은 다음과 같다. 속도경계조건은 식(19)과 식(20)으로 사용하였다.

$$\frac{T^{n+1} - T^n}{\Delta t} = -v^n \cdot \nabla T + \frac{1}{C_p P_e} \nabla \cdot (\kappa^n \nabla T^n) \tag{18}$$

\hat{v} 는 유속의 경계값을 의미하며 P 는 경계에서의 규정값을 의미한다. 또한, Γ_1 은 속도의 고정경계를 의미하고 Γ_2 는 자연 경계를 의미한다. 온도 경계조건은 식(21)과 식(22)를 사용하였다. \hat{T} 는 온도의 경계값을 의미하며, \hat{q} 는 경계에서의 규정값을 의미한다. 또한, Γ_3 는 온도의 고정경계를 의미하고 Γ_4 는 자연경계를 의미한다.

$$v = \hat{v} : \Gamma_1 \tag{19}$$

$$P = P_e n - \frac{\eta}{Re} n \cdot (\nabla v + v \vec{\nabla}) + \frac{2\varepsilon \sigma M_0 H A_1}{Re} n \times \omega : \Gamma_2 \tag{20}$$

$$T = \hat{T} : \Gamma_3 \tag{21}$$

$$\frac{\partial T}{\partial n} = \hat{q} : \Gamma_4 \tag{22}$$

이러한 경계조건들을 이용하여 수치해석을 이용하여 해를 얻기 위한 수렴조건은 다음과 같다. 즉 수치해석을 통하여 해를 안정하게 수렴시키기 위해서는 시간간격(Δt)을 일정한 값 ($h_{e \min}$) 이하의 조건으로 해야 하며 수렴조건은 식(23)과 같다.

$$\Delta t \leq \frac{Re}{4\eta} h_{e \min}^2 \tag{23}$$

여기서, 최대치 Δt_{max} 를 안정성 때문에 상한값 표준으로 설정하였고, 각 요소의 대표치수 h_e 는 $h_e = \sqrt{S_e}$ 이며, 전 요소 중 최소요소로부터 구한 값을 $h_{e \min}$ 으로 하였다[10].

IV. 결과 및 고찰

1. 검증

본 연구에서 사용된 수치해석의 검증을 위하여 Davis (1983)[11] 및 Fusegi et al.(1991)[12]의 연구결과와 비교하였다. 이를 위하여 기존의 연구들과 동일한 조건들을 적용하였고, 상측면과 하측면을 단열(adiabatic)조건으로 가정하고 좌측면을 고온조건으로 우측면을 저온조건으로 가정하여 수치해석 검증을 진행하였다. 식(24)에서 식(26)을 이용하여 Grashof 수, Prandtl 수 그리고 Rayleigh 수를 계산하였으며, Table II에 나타낸 Nusselt 수는 식(27)과 식(28)을 이용하여 Rayleigh 수 변화에 따른 국소 및 평균 Nusselt 수를 계산하였다.

$$Gr = \frac{\beta \Delta T g L^3 \rho^2}{\eta^2} \tag{24}$$

$$Pr = \frac{C_p \eta}{\kappa} \tag{25}$$

$$Ra = Pr \cdot Gr \tag{26}$$

$$Nu = \frac{T_{hot} - T}{\Delta T} \frac{L}{\Delta x_{hot}} \tag{27}$$

$$Nu = \int_0^L Nu dy \tag{28}$$

Table II는 본 연구에서 얻어진 Rayleigh 수 변화에 따른 평균 Nusselt 수를 타 연구자들과 비교한 결과이다. $Ra = 10^4$ 인 경우, 본 연구에서 얻은 평균 Nusselt 수는 Davis(1983)

Table II. Comparisons of average Nusselt numbers.

Ra	This work	De Vahl Davis	Fusegi et al.
10 ⁴	2.336	2.243	2.302
10 ⁵	4.825	4.519	4.646

및 Fusegi et al.(1991)의 결과와 비교하여 각각 4.1 % 및 1.5 %의 차이를 보였고, $Ra = 10^5$ 인 경우, 본 연구에서 얻은 평균 Nusselt 수는 Davis(1983) 및 Fusegi et al.(1991)의 결과와 비교하여 각각 6.8 % 및 3.9 %의 차이로 비교적 정확하게 일치하는 것을 보였다.

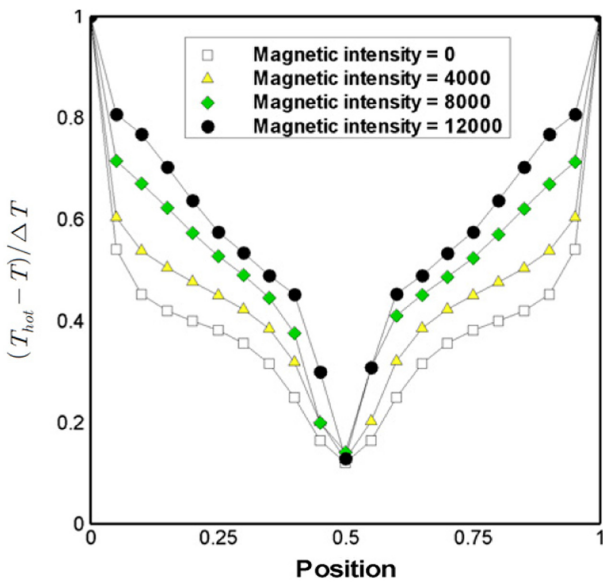
2. 수치해석 결과

Fig. 2는 정육면체 내 자성유체에 수직방향으로 자장을 인가하였을 경우의 자장세기 변화에 따른 고온벽면에서의 온도

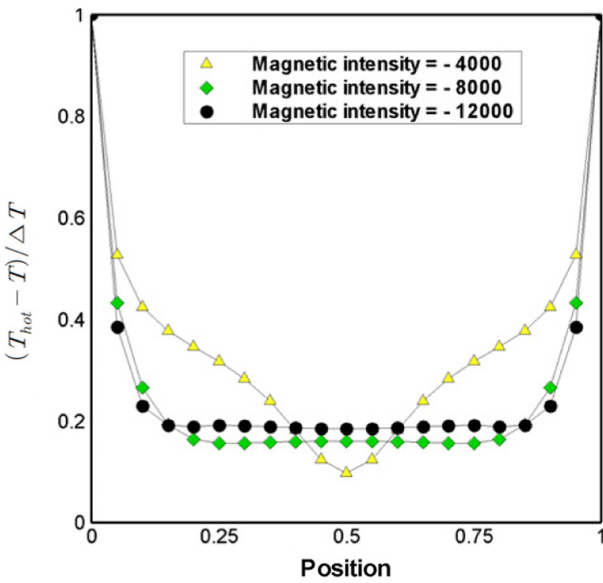
특성을 나타낸다. 각 그래프에서 수직축($(T_{hot} - T)/\Delta T$)은 고온 단면 각 위치에서 Nusselt 수와 측정 위치(Δy_{hot})의 곱으로 정의되며, $(T_{hot} - T)/\Delta T$ 이 증가할수록 Nusselt 수는 증가하여 자성유체의 대류 열전달 계수가 증가함을 의미한다.

Fig. 2(a)는 정육면체의 아랫면에서 자장을 인가한 경우(+)의 자성유체 온도 특성을 나타낸다. Fig. 2(a)에서, 자장을 증가시킬수록 축으로부터 0.5지점을 제외한 나머지 영역에서 자성유체의 대류 열전달이 활발히 진행되었다. 즉 Nusselt 수가 최소인 0.5지점을 제외하고는 자장세기에 따라 Nusselt 수가 3.28~16.13으로 나타났으며 최소 Nusselt 수인 0.5지점에서의 0.12~0.14에 비하여 최소 23배에서 최대 134배 증가하였다. Fig. 2(b)는 정육면체의 윗면에서 자장을 인가한 경우(-)의 자성유체 온도 특성을 나타낸다. 정육면체의 윗면에서 자장을 증가시킬수록 대부분의 영역에서 대류 열전달 현상은 비교적 균일하게 억제됨을 알 수 있다. Fig. 2(a)에서 자장강도 4000~12000에서 평균 Nusselt수는 9.85 이고, Fig. 2(b)에서 자장강도 -4000~-12000에서 평균 Nusselt수는 4.77로서 자장의 방향에 따라 정육면체 내의 자성유체의 온도 및 열전달 특성을 제어 또는 억제할 수 있음을 알 수 있다.

Fig. 3는 정육면체 내 자성유체에 자장을 인가하지 않은 경우 Rayleigh 수 변화에 따른 고온벽면에서의 온도 특성을 나타낸다. Rayleigh 수가 증가할수록 Nusselt 수가 증가하여 $(T_{hot} - T)/\Delta T$ 값은 증가한다. 따라서 Rayleigh 수가 증가할수록 자성유체의 대류 열전달 특성은 증가하였다. 이러한 결과는 Ryu(2001)[13]의 연구결과에서도 고찰되어진다.



(a) bottom



(b) top

Fig. 2. (Color online) Temperature characteristics with the magnetic intensity. (Direction of magnetic fields = (a) bottom, (b) top).

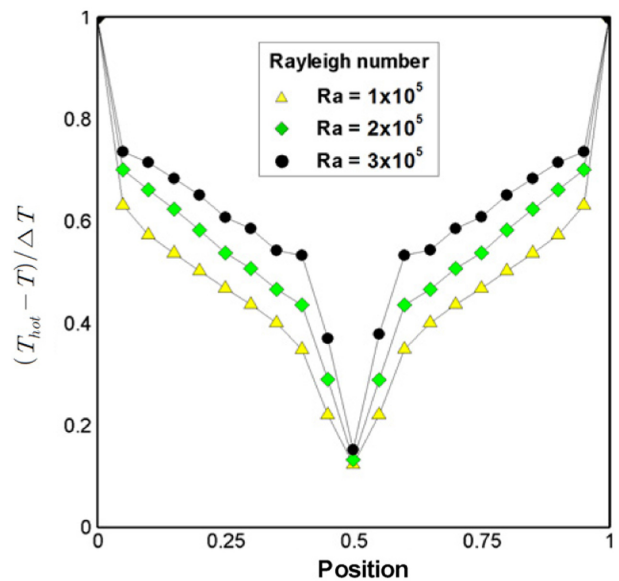


Fig. 3. (Color online) Temperature characteristics with the Rayleigh numbers (Various Rayleigh numbers at the hot wall).

V. 결 론

참고문헌

본 연구에서는 정육각형 내 자성유체의 거동을 예측할 수 있는 수치해석을 유한요소법을 이용하여 고찰하였다. 자성유체의 지배방정식은 일반적인 뉴턴유체의 지배방정식과 함께 강자성체 미립자의 거동을 예측하기 위한 내부회전을 고려한 Maxwell 자장방정식 및 자화의 구성방정식을 추가로 고려하였고, GSMAC법을 이용하여 각 방정식을 이산화하고 속도와 온도의 경계조건을 이용하여 계산하였다. 본 수치해석을 검증하기 위하여 기존 연구자들과 비교하여 다음과 같은 결론을 얻었다.

1. 본 수치해석 결과는 Davis(1983) 및 Fusegi et al.(1991)의 결과와 비교할 경우 평균 Nusselt 수 차이가 각각 5.5 % 및 2.7 %로 비교적 정확하게 예측하였다.
2. 해석모델의 아랫면에서 자장을 인가한 경우 자장세기에 따라 Nusselt수가 3.28~16.13으로 나타났고 최소 Nusselt 수인 0.5지점에서의 0.12~0.14에 비하여 최소 23배에서 최대 134배 증가하였다. 또한, 해석모델의 윗면에서 자장을 인가한 경우 대류 열전달 현상은 비교적 균일하게 억제되었다.
3. 자장강도 4000~12000에서 평균 Nusselt수는 9.85이고, 자장강도 -4000~-12000에서 평균 Nusselt수는 4.77로 나타났다.
4. Rayleigh 수가 증가할수록 Nusselt 수가 증가하고 $(T_{hot} - T)/\Delta T$ 값은 증가하였다.

감사의 글

본 논문은 동아대학교 교내연구비 지원에 의하여 연구되었음.

- [1] S. S. Papell, U.S. Patent No. 3215572 (1965).
- [2] J. W. Park, S. H. Jin, C. H. Jun, and Y. S. Kim, J. Korean Magn. Soc. **13**, 41 (2003).
- [3] T. Tanahashi, T. Sawada, K. Shizawa, and T. Ando, Trans. Japan Soc. Mech. Eng. (B) **49**, 2513 (1983).
- [4] H. Kawai, Y. Katoh, T. Sawada, and T. Tanahashi, Int. J. Japan Soc. Mech. Eng. Ser. II. **33**, 17 (1990).
- [5] S. Kamiyama, K. Koike, and T. Oyama, J. Magn. Magn. Mater. **39**, 23 (1983).
- [6] J. Xaman, G. Alvarez, L. Lira, and C. Estrada, Energ. and Buil. **37**, 787 (2005).
- [7] S. W. Hang, J. W. Park and L. S. Seo, J. Korean Magn. Soc. **17**, 253 (2007).
- [8] J. W. Park, Ph. D. Dissertation, Dept. of Mechanical Engineering, Dong-A Univ., Busan, Korea (2002).
- [9] Y. Kato, T. Sato, T. Sawada, and T. Tanahashi, 12th International Conference on Numerical Methods in Fluid Dynamics **371**, 209 (1990).
- [10] S. H. Jin, A Master's Dissertation, Dept. of Mechanical Engineering, Dong-A Univ., Busan, Korea (2001).
- [11] G. De Vahl Davis, Int. J. Numer. Meth. Fluids **3**, 249 (1983).
- [12] T. Fusegi, J. M. Hyun, K. Kuwahara, and B. Farouk, Int. J. Heat and Mass Transfer **34**, 1543 (1991).
- [13] S. O. Ryu, Ph. D. Dissertation, Dept. of Mechanical Engineering, Dong-A Univ., Busan, Korea (2001).

Numerical Modeling for Behavior Prediction of the Magnetic Fluid Based on Finite Element Method

Jae-Hyeong Seo

Graduate School of Mechanical Engineering, Dong-A University, Hadan 840, Saha-gu, Busan 604-714, Korea

Moo-Yeon Lee* and Lee-Soo Seo

Department of Mechanical Engineering, Dong-A University, Hadan 840, Saha-gu, Busan 604-714, Korea

(Received 11 January 2013, Received in final form 24 January 2013, Accepted 25 January 2013)

The objective of this study is numerically analyzed the behavior characteristics of the magnetic fluid in a closed rectangular container using finite element method (FEM). The governing equations are solved with magnetization and Maxwell equations for consideration of rotating effect of the magnetite particle. Then the discretized equations are solved with boundary conditions of the velocity and temperature. The developed model is validated with the results of Davis (1983) and Fusegi et al. (1991) has a good agreement within 5.5 % and 2.7 %, respectively.

Keywords : behavior, FEM (finite element method), magnetic fluid, nusselt number