

## 시변 시간지연을 갖는 네트워크 제어 시스템의 $H_\infty$ 제어

# $H_\infty$ Control of Networked Control Systems with Two Additive Time-varying Delays

김재만, 박진배\*  
(Jae Man Kim<sup>1</sup> and Jin Bae Park<sup>1</sup>)  
<sup>1</sup>Yonsei University

**Abstract:** This paper presents a stabilization method for NCS (Networked Control Systems) with two additive time-varying delays. Each time delay component between the plant and the controller has different characteristics depending on communication network, and has the upper and lower bounds. The time delay occurring from the controller to the plant has an effect on the time delay occurring from the plant to the controller, and the relationship between two delays is taken into account on the stability analysis. Based on the two additive delay components and the bound conditions, the appropriate Lyapunov-Krasovskii functional and the LMI (Linear Matrix Inequality) method derive the stability condition and the  $H_\infty$  norm constraint for time-varying delayed NCS. Simulation results are finally given to demonstrate the effectiveness of the proposed method.

**Keywords:** NCS, time-varying delay,  $H_\infty$  control, LMI

### 1. 서론

네트워크 제어 시스템(NCS: Networked Control System)은 여러 지능 장치나 제어 시스템에서 통신 네트워크를 통해 연결되어 있는 피드백 회로 시스템이다. 네트워크는 NCS에서 물리적으로 서로 떨어져 있는 시스템과 제어기간 신호나 정보를 전송하는 역할을 한다. 낮은 설치비용, 공간사용의 최소화, 시스템의 무게감소 등 다양한 장점으로 인해 NCS는 로봇, 자동차, 항공 등 여러 분야에서 활용되고 있다. 하지만 NCS에서 해결해야 할 문제점들 중 하나는 플랜트와 제어기 사이의 데이터 전송시 발생하는 시간지연이다. NCS에서의 시간지연 문제는 시스템을 불안정하게 하거나 성능을 저하시키므로 꾸준히 NCS의 시간지연 문제를 해결하고 시스템의 안정성을 보장하기 위한 많은 연구들이 수행되어 왔다 [1]-[6].

통신 네트워크의 종류에 따라 NCS의 시간지연은 시불변 시간지연과 시변 시간지연으로 나눌 수 있다. IEEE 802.4, PROFIBUS, FIP와 같은 근거리 통신 프로토콜에서 데이터 패킷들은 주기적인 순서(cyclic order)대로 전송되므로 시간지연 또한 일정하게 발생한다. 이와같이 시간지연이 일정하게 발생하는 NCS의 안정성에 대한 연구들이 수행되었다 [7-9]. 시간지연이 일정한 선형시스템에 대한 강인  $H_\infty$  제어 방법이 제안되었으며[7], 상태 시간지연을 갖는 불확실한 선형 시스템에 대한 새로운 유계 실수 정리(bounded real

lemma)가 제안되었다[8]. 또한 [9]에서는 시간지연을 갖는 불확실성 이산 시스템에 대한  $H_\infty$  제어가 연구되었다. 상기의 연구들에서는 시간지연의 크기가 정해져 있으므로 시스템의 안정성 조건을 구하는 방법이 비교적 간단하다.

반면 CAN, Ethernet 등의 네트워크에서 시간지연의 크기는 지속적으로 바뀌며, NCS의 시간지연 문제를 다루는 대부분의 연구들은 시변 시간지연에 초점을 맞춘다. 시변 시간지연을 갖는 시스템은 반드시 시간지연의 상한 값을 고려해야 하므로, 시스템의 안정성 분석이 더욱 복잡하다. 제어기 설계에 있어서 샘플링 주기와 함께 네트워크 통신으로 인한 시변 시간지연이 동시에 고려되었으며[10-14], 시변 시간지연을 마르코브 연쇄(Markov chain)와 확률 변수(stochastic variable)로 모델링하였다[15,16]. [17]과 [18]에서는 시간지연을 갖는 NCS에 대한 강인  $H_\infty$  제어기 설계가 제안되었다. 위에서 언급한 대부분의 연구들에서는 NCS에서 발생하는 시간지연을 하나의 변수만으로 표현하였다. 하지만 최근 시간지연의 특성에 대한 새로운 접근방식이 제안되었으며[19], 제안된 시간지연 모델은 시스템과 제어기 사이에서 각각 발생하는 시간지연을 합(sum)의 형태로 나타내었다. 하지만 이 결과 또한 시간지연의 형태를 개선할 필요가 있다. 시변 시간지연일 경우, 시간지연의 합은 다른 형태가 되어야 한다. [19]에서는 두 개의 시간지연이 서로 독립적이라고 가정하였지만, 시변 시간지연의 경우에는 실제로 두 시간지연이 서로 영향을 주고받게 된다.

따라서 본 논문에서는 플랜트와 제어기 사이의 네트워크에서 시변 시간지연을 갖는 NCS에 대한 안정화 방법을 제안한다. 두 개의 시변 시간지연은 플랜트와 제어기 사이에서 발생하며 시간지연의 크기는 상한 값과 하한 값을 갖는다. 두 개의 시간지연 특성과 크기를 바탕으로 적절한

\* 책임저자(Corresponding Author)

논문접수: 2012. 10. 11., 수정: 2012. 11. 26., 채택확정: 2013. 1. 11.

김재만, 박진배: 연세대학교 전기전자공학과

(utopiaro@yonsei.ac.kr/jbpark@yonsei.ac.kr)

※ 본 논문은 2013년도 지식경제부의 재원으로 한국에너지기술연구원(KETEP)의 지원을 받아 연구하였음(No.20103020070070).

Lyapunov-Krasovskii 함수와 LMI 방법을 통해 안정성을 유도한다. 또한 외란에 강인한  $H_\infty$  제어도 유도한다. 최종적으로 모의실험을 통해 제안한 방법의 우수성을 보인다.

**II. 문제 설정**

그림 1과 같이 두 개의 시변 시간지연을 갖는 NCS를 고려하자. NCS에서 플랜트는 선형 시스템이며,  $d_1(t)$ 는 제어기와 구동기 사이의 시간지연,  $d_2(t)$ 는 센서와 제어기 사이의 시간지연을 나타낸다. 네트워크상에서 발생하는 두 가지 시간지연의 크기는 제한되어 있으며 연속적으로 변한다고 가정한다. 두 가지 시간지연의 조건은 식 (1)과 같다.

$$\begin{aligned} 0 \leq h_1 \leq d_1(t) \leq h_2, \quad \dot{d}_1(t) \leq \tau_1, \\ 0 \leq h_3 \leq d_2(t) \leq h_4, \quad \dot{d}_2(t) \leq \tau_2, \end{aligned} \quad (1)$$

여기서  $0 \leq h_1 \leq h_2$ 와  $0 \leq h_3 \leq h_4$ 는 각각  $d_1(t)$ ,  $d_2(t)$ 에 대한 시간지연의 하한 값과 상한 값이며,  $\tau_1$ 과  $\tau_2$ 는 각각 시간지연  $d_1(t)$ ,  $d_2(t)$ 에 대한 미분의 상한 값이다.

시간지연을 갖는 선형 시스템과 상태 궤환 제어기는 각각  $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$ 와  $u(t) = Kx(t-d(t))$ 로 표현된다. 이를 폐회로 시스템으로 나타내면 식 (2)와 같다.

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + BKx(t-d(t)), & t > 0, \\ x(t) = \phi(t), & t \in [-h, 0]. \end{cases} \quad (2)$$

하지만 시간지연을 갖는 일반적인 폐회로 시스템과 달리 NCS에서는 플랜트와 제어기간 두 가지 형태의 시간지연 특성을 갖으며, 시간지연을 고려하였을 때, 센서에서 제어기로 전송되는 정보는 식 (3)과 같이 나타낼 수 있다.

$$u_c(t) = Kx_c(t) = Kx(t-d_2(t)), \quad (3)$$

여기서  $u_c(t)$ 는 제어기 출력이고  $x_c(t)$ 는 시간 지연된 플랜트 출력이다. 그러면 구동기 입력은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} u(t) &= u_c(t-d_1(t)), \\ &= Kx(t-d_1(t)-d_2(t-d_1(t))). \end{aligned} \quad (4)$$

식 (3), (4)와 같이 플랜트와 제어기간 두 가지 형태의 시변 시간지연을 갖는 NCS를 고려하였을 때 폐회로 시스템은 식 (5)와 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + BKx(t-d_1(t)-d_2(t-d_1(t))), & t > 0, \\ x(t) = \phi(t), & t \in [-h, 0]. \end{cases} \quad (5)$$

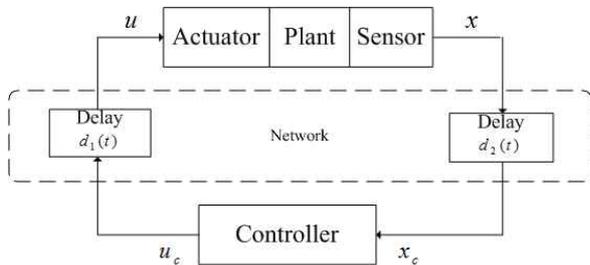


그림 1. 두 개의 시간지연을 갖는 NCS의 구조.  
Fig. 1. Structure of networked control system with two time delays.

참조 1: 서로 다른 특성을 갖는 두 개의 시간지연을 고려한 네트워크 지연 시스템에 대한 문제는 이전에 다루어졌다[19]. [19]에서 시스템 입력의 시간지연 크기는 두 가지의 시간지연  $d_u(t)$ 와  $d_s(t)$ 의 합으로 표현하였다. 하지만 구동기 입력으로 들어가는 정보는 현재시간  $t$ 의 제어 값이 반영되는 것이 아니라  $t-d_u(t)$ 에서의 값이다. 따라서 시간지연의 크기는 식 (4)처럼 표현되어야 한다. 더욱이 [19]에서는 시간지연의 하한 값을 0으로 간주하였으나, 일반적으로 표현하였을 때, 네트워크 환경에서 시간지연의 하한 값은 0이 되지 않는다.

본 논문에서는 서로 다른 두 개의 시변 시간지연을 갖는 시스템 (5)에 대해 제어기 (4)를 설계하며, 시간지연  $d_1(t)$ 와  $d_2(t)$ 가 조건식 (1)을 만족할 경우, 시스템이 점진적으로 안정하다는 것을 보인다. 또한 시스템에 외란이 포함된 조건에서도 강인한  $H_\infty$  제어를 설계하여 시스템이 안정함을 증명한다.

**III. 네트워크 제어 시스템의 안정성 분석**

다음과 같이 시간지연을 갖는 NCS를 고려하자.

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + BKx(t-d(t)), & t > 0, \\ x(t) = \phi(t), & t \in [-h, 0], \end{cases} \quad (6)$$

여기서  $d(t) = d_1(t) + d_2(t-d_1(t))$ 는 네트워크 통신으로 인해 발생하는 시간지연의 합이며, 다음 조건을 만족한다.

$$0 \leq d(t) \leq \bar{d}, \quad \dot{d}(t) \leq \tau, \quad (7)$$

여기서  $\bar{d} \leq h_2 + h_4$ 는 총 시간지연  $d(t)$ 의 상한 값이며,  $\tau = \tau_1 + \tau_2 + \tau_1\tau_2$ 는 시간지연  $d(t)$ 에 대한 미분의 상한 값이다.

다음 정리를 통해 본 논문은 두 개의 시변 시간지연,  $d_1(t)$ 와  $d_2(t)$ 가 포함된 NCS (6)의 안정성을 보인다.

정리 1: 서로 다른 두개의 시변 시간지연을 갖고 시간지연의 범위가 조건식 (1)을 만족할 경우, NCS (6)은 부등식 (8)을 만족하는 양의 행렬  $P > 0$ 와 행렬  $Q_i \geq 0$ ,  $R_i \geq 0$ ,  $L_i, M_i, N_i, T_i, V_i$ ,  $i = 1, 2$ 와  $Z_j > 0$ ,  $j = 1, 2, 3$ 가 존재하면 점진적으로 안정하다.

$$\begin{bmatrix} Y_1 & Y_2 \\ \star & Y_3 \end{bmatrix} < 0, \quad (8)$$

여기서

$$Y_1 = \begin{bmatrix} \Phi_{11} - N_1 + N_2 & 0 & \Phi_{14} & 0 & A^T \Phi_{66} \\ \star & \Phi_{22} & -M_1 + M_2 & 0 & 0 & 0 \\ \star & \star & \Phi_{33} & 0 & -L_1 + L_2 & 0 \\ \star & \star & \star & \Phi_{44} - T_1 + T_2 & \Phi_{46} & \\ \star & \star & \star & \star & \Phi_{55} & 0 \\ \star & \star & \star & \star & \star & -\Phi_{66} \end{bmatrix},$$

$$Y_2 = [M \ L \ V \ T \ N],$$

$$Y_3 = \text{diag}\{-(h_3 - h_2)^{-1}Z_1, -(\bar{d} - h_2)^{-1}Z_1, -\bar{d}^{-1}Z_2, -(\bar{d} - h_2)^{-1}Z_2, -h_2^{-1}Z_3\},$$

$$\begin{aligned}\Phi_{11} &= PA + A^T P + Q_1 + R_1 + R_2 + N_1 + N_1^T + V_1 + V_1^T, \\ \Phi_{22} &= -R_2 - N_2 - N_2^T + M_1 + M_1^T, \\ \Phi_{33} &= -(1 - \tau_2)(Q_1 - Q_2) - M_2 - M_2^T, \\ \Phi_{44} &= -(1 - \tau)Q_2 + T_1 + T_1^T - V_2 - V_2^T, \\ \Phi_{46} &= K^T B^T \Phi_{66}, \\ \Phi_{55} &= -R_1 - L_2 - L_2^T - T_2 - T_2^T, \\ \Phi_{66} &= (\bar{d} - h_2)Z_1 + \bar{d}Z_2 + h_2Z_3, \\ \Phi_{14} &= -V_1 + V_2 + PBK,\end{aligned}$$

$$N = \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, M = \begin{bmatrix} 0 \\ M_1 \\ M_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, V = \begin{bmatrix} V_1 \\ 0 \\ 0 \\ V_2 \\ 0 \end{bmatrix}, L = \begin{bmatrix} 0 \\ L_1 \\ 0 \\ L_2 \end{bmatrix}, T = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ T_1 \\ T_2 \end{bmatrix}.$$

증명: 안정성 증명을 위해 식 (9)와 같이 Lyapunov-Krasovskii 함수를 설정한다.

$$V(t) = V_1(t) + V_2(t) + V_3(t) + V_4(t), \quad (9)$$

여기서 각 함수는 다음과 같다.

$$\begin{aligned}V_1(t) &= x^T P x(t), \\ V_2(t) &= \int_{t-d_2(t)}^t x^T(s) Q_1 x(s) ds + \int_{t-d(t)}^{t-d_2} x^T(s) Q_2 x(s) ds, \\ V_3(t) &= \int_{t-\bar{d}}^t x^T(s) R_1 x(s) ds + \int_{t-h_2}^t x^T(s) R_2 x(s) ds, \\ V_4(t) &= \int_{-\bar{d}}^{-h_2} \int_{t+\theta}^t \dot{x}^T(s) Z_1 \dot{x}(s) ds d\theta \\ &\quad + \int_{-\bar{d}}^0 \int_{t+\theta}^t \dot{x}^T(s) Z_2 \dot{x}(s) ds d\theta \\ &\quad + \int_{-h_2}^0 \int_{t+\theta}^t \dot{x}^T(s) Z_3 \dot{x}(s) ds d\theta.\end{aligned}$$

여기서 양의 행렬  $P > 0$ 와 행렬  $Q_i \geq 0, R_i \geq 0, i = 1, 2, Z_j > 0, j = 1, 2, 3$ 는 계산을 통해 구해진다. 시스템 (6)을 이용하여 함수  $V(t)$ 의 미분을 계산하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\dot{V}_1(t) &= 2x^T(t) P \dot{x}(t) \\ &= 2x^T(t) P [Ax(t) + BKx(t-d(t))],\end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned}\dot{V}_2(t) &= x^T(t) Q_1 x(t) - (1 - \dot{d}_2(t)) x^T(t-d_2(t)) Q_1 x(t-d_2(t)) \\ &\quad + (1 - \dot{d}_2(t)) x^T(t-d_2(t)) Q_2 x(t-d_2(t)) \\ &\quad - (1 - \dot{d}(t)) x^T(t-d(t)) Q_2 x(t-d(t)) \\ &= x^T(t) Q_1 x(t) - (1 - \dot{d}(t)) x^T(t-d(t)) Q_2 x(t-d(t)) \\ &\quad - (1 - \dot{d}_2(t)) x^T(t-d_2(t)) (Q_1 - Q_2) x(t-d_2(t)) \\ &\leq x^T(t) Q_1 x(t) - (1 - \tau) x^T(t-d(t)) Q_2 x(t-d(t)) \\ &\quad - (1 - \tau_2) x^T(t-d_2(t)) (Q_1 - Q_2) x(t-d_2(t)),\end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned}\dot{V}_3(t) &= x^T(t) R_1 x(t) - x^T(t-\bar{d}) R_1 x(t-\bar{d}) \\ &\quad + x^T(t) R_2 x(t) - x^T(t-h_2) R_2 x(t-h_2),\end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned}\dot{V}_4(t) &= (\bar{d} - h_2) \dot{x}^T(t) Z_1 \dot{x}(t) - \int_{t-\bar{d}}^{t-h_2} \dot{x}^T(s) Z_1 \dot{x}(s) ds \\ &\quad + \bar{d} \dot{x}^T(t) Z_2 \dot{x}(t) - \int_{t-\bar{d}}^t \dot{x}^T(s) Z_2 \dot{x}(s) ds \\ &\quad + h_2 \dot{x}^T(t) Z_3 \dot{x}(t) - \int_{t-h_2}^t \dot{x}^T(s) Z_3 \dot{x}(s) ds\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\leq \dot{x}^T(t) [(\bar{d} - h_2) Z_1 + \bar{d} Z_2 + h_2 Z_3] \dot{x}(t) \\ &\quad - \int_{t-d_2(t)}^{t-h_2} \dot{x}^T(s) Z_1 \dot{x}(s) ds - \int_{t-\bar{d}}^{t-d_2(t)} \dot{x}^T(s) Z_1 \dot{x}(s) ds \\ &\quad - \int_{t-\bar{d}}^{t-d(t)} \dot{x}^T(s) Z_2 \dot{x}(s) ds - \int_{t-d(t)}^t \dot{x}^T(s) Z_2 \dot{x}(s) ds \\ &\quad - \int_{t-h_2}^t \dot{x}^T(s) Z_3 \dot{x}(s) ds.\end{aligned} \quad (13)$$

Newton-Leibniz 공식에 의해, 다음 식은 적합한 크기를 갖는 행렬  $N_i, M_i, L_i, W_i, i = 1, 2$ 에 의해 정의된다.

$$\begin{aligned}A_1 &= 2 \left[ x^T(t) \quad x^T(t-h_2) \right] \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{bmatrix} \\ &\quad \times \left[ x(t) - x(t-h_2) - \int_{t-h_2}^t \dot{x}(s) ds \right] = 0, \\ A_2 &= 2 \left[ x^T(t-h_2) \quad x^T(t-d_2(t)) \right] \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{bmatrix} \\ &\quad \times \left[ x(t-h_2) - x(t-d_2(t)) - \int_{t-d_2(t)}^{t-h_2} \dot{x}(s) ds \right] = 0, \\ A_3 &= 2 \left[ x^T(t-d_2(t)) \quad x^T(t-\bar{d}(t)) \right] \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \end{bmatrix} \\ &\quad \times \left[ x^T(t-d_2(t)) - x^T(t-\bar{d}(t)) - \int_{t-\bar{d}}^{t-d_2(t)} \dot{x}(s) ds \right] = 0, \\ A_4 &= 2 \left[ x^T(t-d(t)) \quad x^T(t-\bar{d}(t)) \right] \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix} \\ &\quad \times \left[ x^T(t-d(t)) - x^T(t-\bar{d}(t)) - \int_{t-\bar{d}}^{t-d(t)} \dot{x}(s) ds \right] = 0, \\ A_5 &= 2 \left[ x^T(t) \quad x^T(t-d(t)) \right] \begin{bmatrix} W_1 \\ W_2 \end{bmatrix} \\ &\quad \times \left[ x^T(t) - x^T(t-d(t)) - \int_{t-d(t)}^t \dot{x}(s) ds \right] = 0.\end{aligned} \quad (14)$$

식 (10)-(14)를 통해 다음 부등식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned}\dot{V}(t) &\leq \dot{V}_1(t) + \dot{V}_2(t) + \dot{V}_3(t) + \dot{V}_4(t) \\ &\leq \xi^T(t) [\Sigma_1 + h_2 N Z_3^{-1} N^T + (h_3 - h_2) M Z_1^{-1} M^T \\ &\quad + \bar{d} V Z_2^{-1} V^T + (\bar{d} - h_2) L Z_1^{-1} L^T \\ &\quad + (\bar{d} - h_2) T Z_2^{-1} T^T] \xi(t),\end{aligned} \quad (15)$$

여기서

$$\Sigma_1 = \begin{bmatrix} \Sigma_{11} - N_1 + N_2 & 0 & \Sigma_{14} & 0 \\ \star & \Phi_{22} & -M_1 + M_2 & 0 & 0 \\ \star & \star & \Phi_{33} & 0 & -L_1 + L_2 \\ \star & \star & \star & \Sigma_{44} - T_1 + T_2 \\ \star & \star & \star & \star & \Phi_{55} \end{bmatrix}, \quad (16)$$

$$\begin{aligned}\Sigma_{11} &= \Phi_{11} + A^T \Phi_{66} A, \\ \Sigma_{14} &= \Phi_{14} + A^T \Phi_{66} B K, \\ \Sigma_{44} &= \Phi_{44} + (B K)^T \Phi_{66} B K.\end{aligned}$$

식 (15)에서  $A_1 = \Sigma_1 + h_2 N z_3^{-1} N^T + (h_3 - h_2) M z_1^{-1} M^T + \bar{d} V z_2^{-1} V^T + (\bar{d} - h_2) L z_1^{-1} L^T + (\bar{d} - h_2) T z_2^{-1} T^T < 0$ 을 만족하면, 슈어 여수정리 (Schur complements)에 의해 식 (15)는 식 (8)과 같으므로  $\dot{V}(t) < 0$ 을 만족하여 식 (6)이 점진적으로 안정함을 얻는다. ■

IV.  $H_\infty$  안정성 분석 및 제어기 설계

본 절에서는 시스템 외란과 두 개의 시변 시간지연을 갖는 NCS에 대한 제어기를 설계하고 강인  $H_\infty$  성능을 보인다. 다음과 같이 외란과 시변 시간지연을 갖는 NCS를 고려하자.

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + BKx(t-d(t)) + Ew(t), \\ y(t) = Cx(t) + Fw(t), \\ x(t) = \phi(t), \quad t \in [-h, 0], \end{cases} \quad (17)$$

여기서  $w(t)$ 는 외란이며,  $A, B, C, E, F$ 는 시스템 행렬이다. 본 절의 목적은 시스템 (17)이 외란 성능지수  $\gamma$ 에 대해 점진적으로 안정함을 보이는 것이다. 즉, 0이 아닌 외란  $w(t)$ 에 대하여  $\|y(t)\|_2 < \gamma\|w(t)\|_2$ 을 만족하는 제어기를 설계한다.

정리 2: 시변 시간지연을 갖는 NCS (17)과 시간지연 범위 조건 (1)을 가정하자. 식 (18)을 만족하는 양의 행렬  $P > 0$ , 행렬  $Q_i \geq 0, R_i \geq 0, i=1,2$ 와 행렬  $Z_j > 0, j=1,2,3$ 이 존재하면,  $H_\infty$  외란 성능지수  $\gamma$ 를 만족하는 선형 시변 시간지연 NCS는 점진적으로 안정하다.

$$\begin{bmatrix} \Psi_1 & Y_2 \\ \star & Y_3 \end{bmatrix} < 0, \quad (18)$$

여기서

$$\Psi_1 = \begin{bmatrix} \Phi_{11} - N_1 + N_2 & 0 & \Phi_{14} \\ \star & \Phi_{22} & -M_1 + M_2 & 0 \\ \star & \star & \Phi_{33} & 0 \\ \star & \star & \star & \Phi_{44} \\ \star & \star & \star & \star \\ 0 & PE & A^T \Phi_{66} & C^T \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -L_1 + L_2 & 0 & 0 & 0 \\ -T_1 + T_2 & 0 & K^T B^T \Phi_{66} & 0 \\ \Phi_{55} & 0 & 0 & 0 \\ \star & -\gamma^2 I & E^T \Phi_{66} & F^T \\ \star & \star & -\Phi_{66} & 0 \\ \star & \star & \star & -I \end{bmatrix}. \quad (19)$$

증명: Lyapunov-Krasovskii 함수는 정리 1의 식 (9)와 동일하다. 임의의 0이 아닌 외란  $w(t)$ 를 고려했을 때, 함수의 미분은 식 (20)과 같다.

$$\begin{aligned} & \dot{V}(t) + y^T(t)y(t) - \gamma^2 w^T(t)w(t) \\ &= \begin{bmatrix} \xi(t) \\ w(t) \end{bmatrix} [\Sigma_2 + h_2 N z_3^{-1} N^T + (h_3 - h_2) M z_1^{-1} M^T \\ & \quad + \bar{d} V z_2^{-1} V^T + (\bar{d} - h_2) L z_1^{-1} L^T + (\bar{d} - h_2) T z_2^{-1} T^T] \begin{bmatrix} \xi(t) \\ w(t) \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (20)$$

여기서

$$\begin{aligned} \Sigma_2 &= \begin{bmatrix} \Sigma_1 + \tilde{C}^T \tilde{C} P E + F^T F \\ \star & -\gamma^2 I \end{bmatrix}, \\ \tilde{C} &= [C \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]. \end{aligned} \quad (21)$$

식 (20)에서  $A_2 = \Sigma_2 + h_2 N z_3^{-1} N^T + (h_3 - h_2) M z_1^{-1} M^T + \bar{d} V z_2^{-1} V^T + (\bar{d} - h_2) L z_1^{-1} L^T + (\bar{d} - h_2) T z_2^{-1} T^T < 0$ 을 만족하면, 식 (20)은 슈어 여수정리에 의해 식 (18)과 동일하며,  $\dot{V}(t) < 0$ 를 만족한다. ■

하지만 식 (20)은 LMI 형식이 아니므로, Matlab LMI toolbox를 이용하여 해를 구할 수 없다. 따라서 다음을 통해 제어기 설계 및 LMI 형식으로 제어기 파라미터의 표현을 유도한다. 이 문제를 위해서 다음의 보조정리가 이용된다.

보조정리 1:  $\varepsilon_1 > 0, \varepsilon_2 > 0, \varepsilon_3 > 0$ 인 행렬이 주어질 경우  $(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)\varepsilon_1^{-1}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \geq 0$ 을 만족하며, 이는  $-\varepsilon_2 \varepsilon_1^{-1} \varepsilon_2 \leq \varepsilon_1 - 2\varepsilon_2$ 와 동일하다.

정리 3: 주어진 상수  $\gamma > 0$ 에 대하여 부등식 (22)을 만족하는 행렬  $P, Q_i, R_i, i=1,2$ 와  $Z_j, j=1,2,3$ 이 존재한다면, 선형 시변 시간지연 시스템 (18)이 점진적으로 안정하며, 0이 아닌  $w(t)$ 에 대하여 강인  $H_\infty$ 을 만족하게 하는 식 (4)와 같은 제어기가 존재한다.

$$\begin{bmatrix} \Omega_1 & \Omega_2 \\ \star & \Omega_3 \end{bmatrix} < 0, \quad (22)$$

여기서

$$\Omega_1 = \begin{bmatrix} \Pi_{11} - \bar{N}_1 + \bar{N}_2 & 0 & -\bar{V}_1 + \bar{V}_2 + B\bar{K} \\ \star & \Pi_{22} & -\bar{M}_1 + \bar{M}_2 & 0 \\ \star & \star & \Pi_{33} & 0 \\ \star & \star & \star & \Pi_{44} \\ \star & \star & \star & \star \\ 0 & E & \bar{P}A^T & \bar{P}C^T \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\bar{L}_1 + \bar{L}_2 & 0 & 0 & 0 \\ -\bar{T}_1 + \bar{T}_2 & 0 & \bar{K}^T B^T & 0 \\ \Pi_{55} & 0 & 0 & 0 \\ \star & -\gamma^2 I & E^T & F^T \\ \star & \star & -\bar{\Phi}_{66} & 0 \\ \star & \star & \star & -I \end{bmatrix} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \Omega_2 &= [\bar{M} \ \bar{L} \ \bar{V} \ \bar{T} \ \bar{N}], \\ \Omega_3 &= \{-(h_3 - h_2)^{-1} \mathbf{q}_1, -(\bar{d} - h_2)^{-1} Z_1 \mathbf{q}_1, \\ & \quad -\bar{d}^{-1} \mathbf{q}_2, -(\bar{d} - h_2)^{-1} \mathbf{q}_2, -h_2^{-1} \mathbf{q}_3\}, \\ \mathbf{q}_1 &= \bar{Z}_1 - 2\bar{P}, \mathbf{q}_2 = \bar{Z}_2 - 2\bar{P}, \mathbf{q}_3 = \bar{Z}_3 - 2\bar{P}, \\ \bar{P} &= P^{-1}, \bar{K} = K\bar{P}^{-1}, \\ \Pi_i &= \bar{P}\Phi_i\bar{P}, \quad \text{for } i = 11, 22, \dots, 55, \\ [\bar{N}_i \ \bar{M}_i \ \bar{V}_i \ \bar{L}_i \ \bar{T}_i] &= \bar{P}[N_i M_i V_i L_i T_i] \bar{P}, \\ [\bar{Z}_1 \ \bar{Z}_2 \ \bar{Z}_3] &= [Z_1^{-1} Z_2^{-1} Z_3^{-1}], \\ \bar{\Phi}_{66} &= \Phi_{66}^{-1}, \quad i = 1, 2. \end{aligned} \quad (24)$$

또한 제어기 이득 값은 식 (25)과 같다.

$$K = \bar{K}\bar{P}^{-1}. \quad (25)$$

증명: 부등식 (19)의 좌우에  $\Gamma, \Gamma = \text{diag}\{P^{-1}, P^{-1}, P^{-1}, P^{-1}, P^{-1}, I, \Phi_{66}^{-1}, I, P^{-1}, P^{-1}, P^{-1}, P^{-1}, P^{-1}\}$ ,와  $\Gamma^T$ 을 각각

곱하면 부등식 (22)과 동일한 부등식 (26)을 얻을 수 있다.

$$\begin{bmatrix} \Omega_1 & \Omega_2 \\ \star & \Omega_4 \end{bmatrix} < 0, \quad (26)$$

여기서

$$\Omega_4 = \left\{ -(h_3 - h_2)^{-1} \bar{Z}_1, -(\bar{d} - h_2)^{-1} \bar{Z}_1, -\bar{d}^{-1} \bar{Z}_2, -(\bar{d} - h_2)^{-1} \bar{Z}_2, -h_2^{-1} \bar{Z}_3 \right\}.$$

보조정리 1을 이용하면 식 (26)으로부터 식 (22)을 구할 수 있다. ■

### V. 모의 실험

본 절에서는 제안한 방법의 우수성을 보이기 위해 두 개의 모의실험을 한다.

모의실험 1: 다음과 같은 시스템 파라미터들을 갖는 NCS (17)을 고려하자.

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 0.3 \\ 0.5 \end{bmatrix}, \\ C &= [1 \ 0], \quad F = 0.5, \\ \dot{d}_1(t) &\leq 0.1, \quad \dot{d}_2(t) \leq 0.8. \end{aligned}$$

모의실험의 목적은 두 개의 시간지연을 갖는 NCS의 안정성을 보장하기 위한 제어기와 외란에 대한 강인  $H_\infty$  제어를 설계하고 성능을 확인하는 것이다. 먼저, 외란이 없는 경우, 식 (25)에 의해 제어기 이득은 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$K = [-0.0406 \ -2.1562].$$

만약 초기 조건이  $x_0 = [1 \ -1]$  이면, 상태변수는 그림 2와 같이 0으로 수렴한다.

외란을 갖는 NCS를 고려할 경우 먼저 외란은 다음과 같이 설정한다.

$$w(t) = \begin{cases} \sin(0.5t), & 50 \leq t \leq 60, \\ 0, & \text{otherwise,} \end{cases}$$

이 경우 강인  $H_\infty$  제어기는 다음과 같다.

$$K = [-3.9841 \ -2.1380].$$

또한  $H_\infty$  성능지수의 최소 값  $\gamma_{\min} = 0.51$ 이다. 본 연구 및 [17,18]에서는 두 개의 시간지연을 갖는 NCS에서 하나의 시간지연값이 고정된 경우, 다른 시간지연의 상한값에 대한 결과를 표 1과 같이 보인다. 표 1에서 보는바와 같이 본 연구가 가장 큰 시간지연의 범위에서도 안정함을 알 수 있다. 또한 외란이 존재하는 경우에도 그림 3과 같이 점진적으로 안정화됨을 볼 수 있다.

모의실험 2: 두 번째 모의실험은 시간지연의 영향을 알아보기 위해 위성 시스템에 대한 네트워크 제어 문제를 다룬다. 위성 시스템의 동적 방정식은 다음과 같다.

$$\begin{cases} \dot{\theta}(t) = A\theta(t) + Bu(t) + Ew(t), \\ y(t) = C\theta(t), \end{cases}$$

여기서  $\theta(t) = [\theta_1(t) \ \theta_2(t) \ \dot{\theta}_1(t) \ \dot{\theta}_2(t)]$ 는 몸체의 yaw 각도이며,  $u(t)$ 는 제어토크, 그리고  $w(t)$ 는 외란이다. 각각의 시스템 파라미터들은 다음과 같이 주어진다.

표 1. 각각의 경우에 대한 시간지연 크기의 상한값.

Table 1. Calculated delay bounds for different cases.

안정도 조건	$h_2$ 가 주어질 경우 $h_4$ 의 상한값		
	$h_2 = 1$	$h_2 = 1.2$	$h_2 = 1.5$
정리 1	0.544	0.462	0.386
[18]	0.518	0.425	0.377
[17]	0.415	0.376	0.284
안정도 조건	$h_4$ 가 주어질 경우 $h_2$ 의 상한값		
	$h_4 = 0.2$	$h_4 = 0.3$	
정리 1	3.217	2.028	
[18]	2.330	1.832	
[17]	2.263	1.324	

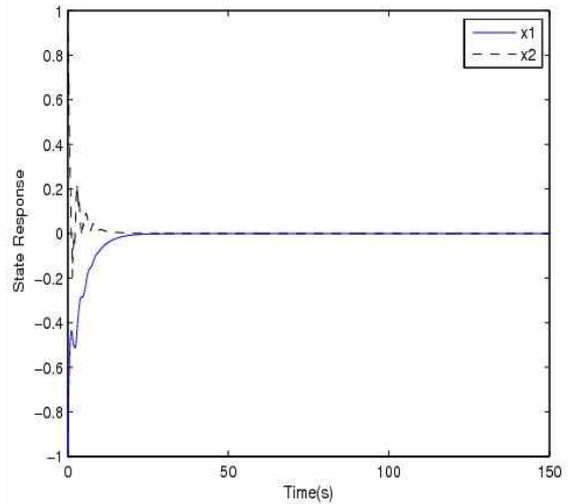


그림 2. 시간에 따른 상태 응답 (외란이 없는 경우).

Fig. 2. State response without disturbance input.

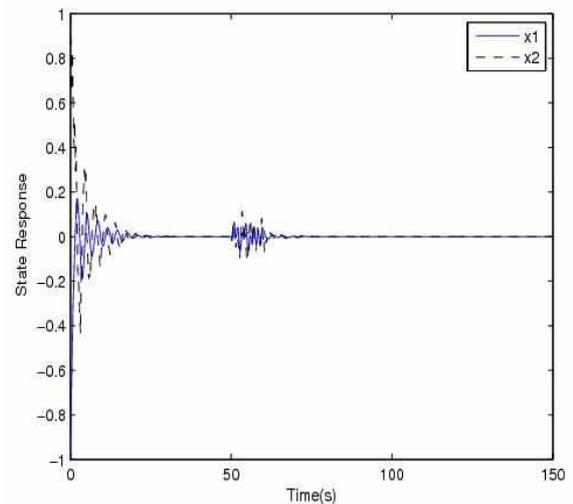


그림 3. 시간에 따른 상태 응답 (외란이 있는 경우).

Fig. 3. State response with disturbance input.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -0.3 & 0.3 & -0.004 & 0.004 \\ 0.3 & -0.3 & 0.004 & -0.004 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$E = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0.1 \end{bmatrix}, \quad C = [0 \ 1 \ 0 \ 0], \quad D = 0, \quad F = 0,$$

$$\dot{d}_1(t) \leq 0.1, \quad \dot{d}_2(t) \leq 0.8.$$

또한, 초기값과 입력외란을 다음과 같이 각각 설정한다.

$$x_0 = [-0.8 \ 0.5 \ -0.3 \ 0.2],$$

$$w(t) = \begin{cases} \sin(0.5t), & 120 \leq t \leq 140 \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

강인  $H_\infty$  제어기는 세 가지의 지연 크기에 따라 설계하였으며 각각의 상태 응답 그래프는 그림 4-6과 같다. 시간 지연의 크기가 커질수록 시스템은 더 느리게 수렴하지만, 최종적으로 위성 시스템이 점진적으로 안정함을 볼 수 있다.

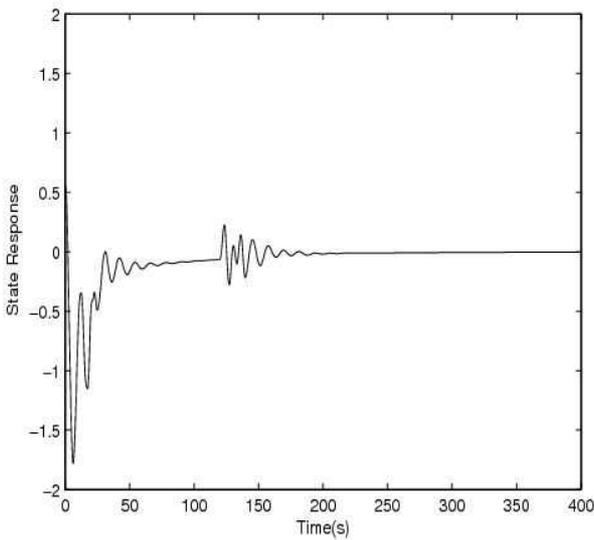


그림 4. 시간에 따른 상태 응답 (시간지연 상한값=1.6(초)).

Fig. 4. State response with  $\bar{d}=1.6$ (s).

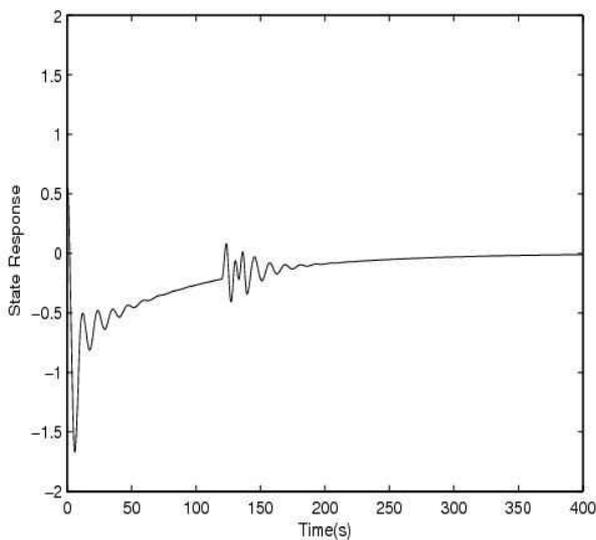


그림 5. 시간에 따른 상태 응답 (시간지연 상한값=2.2(초)).

Fig. 5. State response with  $\bar{d}=2.2$ (s).

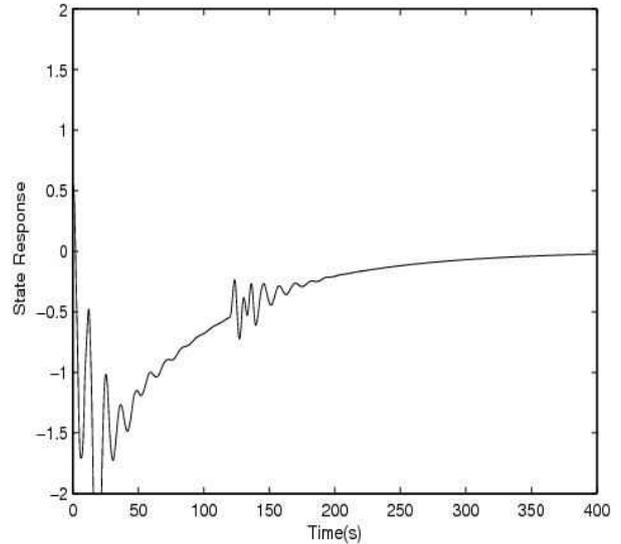


그림 6. 시간에 따른 상태 응답 (시간지연 상한값=2.8(초)).

Fig. 6. State response with  $\bar{d}=2.8$ (s).

### VI. 결론

본 논문에서는 서로 다른 두 개의 시변 시간지연을 갖는 NCS의 안정성을 위한 제어기 설계 방법을 제안하였고, 외란에 강인한  $H_\infty$  제어기를 설계하였다. 시간 지연은 센서와 제어기 사이, 제어기와 구동기 사이의 통신에서 각각 발생하며, 시간지연의 특성 또한 서로 다르다. 특히, 제어기와 구동기 사이에서 발생하는 시간지연은 센서와 제어기 사이의 시간지연 특성에 영향을 미친다. 따라서 위와 같은 시간지연 특성을 고려하여 NCS의 안정성 판별을 하였으며, LMI를 이용하여 외란에 강인한  $H_\infty$  제어기를 설계하였다. 마지막으로 모의실험들을 통해 제안한 제어방법의 우수성을 입증하였다.

### 참고문헌

- [1] G. C. Walsh, H. Ye, and L. G. Bushnell, "Stability analysis of networked control systems," *IEEE Trans. Control Syst. Tech.*, vol. 10, no. 3, pp. 438-446, May 2002.
- [2] S. Hirche, T. Matiakis, and M. Buss, "A distributed controller approach for delay-independent stability of networked control systems," *Automatica*, vol. 45, no. 8, pp. 1828-1836, Aug. 2009.
- [3] W. Zhang and L. Yu, "A robust control approach to stabilization of networked control systems with time-varying delays," *Automatica*, vol. 45, no. 10, pp. 2440-2445, Oct. 2009.
- [4] G. P. Liu, Y. Xia, D. Rees, and W. Hu, "Design and stability criteria of networked predictive control systems with random network delay in the feedback channel," *IEEE Trans. Syst. Man Cybern.*, vol. 37, no. 2, pp. 173-184, Mar. 2007.
- [5] G. S. Bae and Y. H. Joo, "Intelligent controller for net-

worked control systems with time-delay,” *Journal of Institute of Control, Robotics and Systems (in Korean)*, vol. 17, no. 2, pp. 139-144, Feb. 2011.

[6] H. S. Han, “Stability bounds of time-varying uncertainty and delay time for discrete systems with time-varying delayed state”, *Journal of Institute of Control, Robotics and Systems (in Korean)*, vol. 18, no. 10, pp. 895-901, Oct. 2012.

[7] X. Xue and D. Qiu, “Robust  $H_\infty$  compensator design for time-delay systems with norm-bounded time-varying uncertainties,” *IEEE Trans. Automatic Control*, vol. 45, no. 7, pp. 1363-1369, Jul. 2000.

[8] Y. S. Lee, Y. S. Moon, W. H. Kwon, and P. G. Park, “Delay-dependent robust  $H_\infty$  control for uncertain systems with a state-delay,” *Automatica*, vol. 40, no. 1, pp. 65-72, Jan. 2004.

[9] F. Yang, Z. Wang, D. W. C. Ho, and M. Gani, “Robust  $H_\infty$  control with missing measurements and time delays,” *IEEE Trans. Automatic Control*, vol. 52, no. 9, pp. 1666-1672, Sep. 2007.

[10] H. Gao, T. Chen, and J. Lam, “A new delay system approach to network-based control,” *Automatica*, vol. 44, no. 1, pp. 39-52, Jan. 2008.

[11] M. B. G. Cloosterman, N. V. D. Wouw, W. P. M. H. Heemels, and H. Nijmeijer, “Stability of networked control systems with uncertain time-varying delays,” *IEEE Trans. Automatic Control*, vol. 54, no. 7, pp. 1575-1580, Jul. 2009.

[12] W. A. Zhang and L. Yu, “New approach to stabilisation of networked control systems with time-varying delays,” *IET Control Theory and Applications*, vol. 2, no. 12, pp. 1094-1104, Dec. 2008.

[13] L. Dritsas and A. Tzes, “Robust stability bounds for networked controlled systems with unknown, bounded and varying delays,” *IET Control Theory and Applications*, vol. 3, no. 3, pp. 270-280, Mar. 2009.

[14] X. Jiang, Q.-L. Han, S. Liu, and A. Xue, “A new  $H_\infty$  stabilization criterion for networked control systems,” *IEEE Trans. Automatic Control*, vol. 53, no. 4, pp. 1025-1032, May 2008.

[15] D. Huang and S. K. Nguang “Robust disturbance attenuation for uncertain networked control systems with random time delays,” *IET Control Theory and Applications*, vol. 2, no. 11, pp. 1008-1023, Nov. 2008.

[16] F. Yang, Z. Wang, Y. S. Hung, and M. Gani, “ $H_\infty$  control for networked systems with random communication delays,” *IEEE Trans. Automatic Control*, vol. 51, no. 3, pp. 511-518, Mar. 2006.

[17] E. Tian, D. Yue, and Y. Zhang, “On improved delay-dependent robust  $H_\infty$  control for systems with interval time-varying delay,” *Journal of Frank. Institute*, vol.

348, no. 4, pp. 555-567, May 2011.

[18] H. Zhang, M. Li, J. Yang, and D. Yang, “Fuzzy model-based robust networked control for a class of nonlinear systems,” *IEEE Trans. Syst., Man, Cybern. A, Syst., Humans*, vol. 39, no. 2, pp. 437-446, Mar. 2009.

[19] R. Dey, G. Ray, S. Ghosh, and A. Rakshit, “Stability analysis for continuous system with additive time-varying delays: A less conservative result,” *Applied Math. and Comp.*, vol. 215, no. 10, pp. 3740-3745, Jan. 2010.



**김재만**

2005년 연세대학교 전기전자공학과(공학사). 2007년 연세대학교 전기전자공학과(공학석사). 2007년~현재 연세대학교 전기전자공학과 박사과정. 관심분야는 시간지연, 비선형 제어, 상태일치 제어.



**박진배**

1977년 연세대학교 전기공학과 졸업(공학사). 1985년~1990년 Kansas State University 전기 및 컴퓨터 공학과 졸업(공학박사). 1990년~1991년 Kansas State University 전기 및 컴퓨터 공학과 조교수. 1992년~현재 연세대학교 전기전자공학과 교수. 2013년~현재 제어·로봇·시스템학회 회장. 2009년~현재 한국공학한림원 위원. 2009년~현재 한국지식재산연구원 이사. 2009년~현재 교육과학기술부 지주회사설립인가 위원회 위원장. 관심분야는 강인제어, 필터링, 비선형제어, 지능형 모바일로봇, 퍼지지능제어, 뉴럴네트워크, 하다마드시스템, 카오스이론, 유전자알고리즘.