한국군사과학기술학회지 제16권 제3호, pp. 250~254, 2013년 6월

학술논문 지상무기 부문

세 개 지점을 최단거리로 연결하는 전략기지의 위치선정

Location of Strategic Military Base Minimally Connecting Three Frontlines

이 상 중*
Sang-Joong Lee

ABSTRACT

Faster and cheaper transportation of the war supplies to the frontlines is essential for winning a war. This paper proposes a method to select the optimal location of the strategic military base, e.g., the Quartermaster Corps, that minimally connects three frontlines using the optimization technique. The results are also compared to the Steiner Tree theoty.

Keywords : Optimization(최적화), Minimal Path(최단 경로), Strategic Military Base(전략기지), Steiner Tree

1. 서 론

군수물자의 신속한 지원과 수송비용의 최소화는 매우 중요하며 이를 위하여 수송거리의 최단거리화가 우선 필요하다. 주어진 함수로부터 최소비용, 이윤 극대화 등을 구하는 수학적 기법으로는 우선 Optimization 기법을 들 수 있으며[1,2], 주어진 좌표로부터 최단거리 경로(path)를 구하는 데는 Optimization 기법과 Steiner tree 이론 등을 들 수 있다[3~7]. 본 논문은 세 개 지점의 Frontline을 기하학적으로 가장 짧게 연결하는 전략기지의 위치를 찾는 방법을 소개한다. 최적화 기법을 이용하여 세 개 지점을 연결하는 거리를 최소화 하는 전략기지의 좌표를 찾고, 간단한 예제를 통하여 이를 Steiner tree 이론과 계산결과를 비교하였다.

† 2013년 2월 4일 접수~2013년 5월 17일 게재승인
* 서울과학기술대학교(Seoul National University of Science and Technology)
책임저자 : 이상중(85sjlee@seoultech.ac.kr)

2. Optimization을 이용한 세 개 지점을 잇는 최단거리 전략기지의 좌표 계산

Fig. 1과 같이 Frontline A, B, C가 있고, A, B, C에 물자와 정비 service를 제공하기 위한 보급 기지 S의 위치를 찾는다고 가정하자.

보급기지 S가 갖추어야 할 조건은

- A, B, C와 가급적 가까운 곳에 위치하여 유사시 신속한 지원이 가능할 것
- 군수물자 수송과 정비 service를 지원하기 위한 비용, 특히 차량의 연료비용이 최소화되는 지점일 것

등을 들 수 있다. 그렇다면 A, B, C와 S를 연결하는 거리의 합이 최소가 되는 지점을 찾아야 한다.

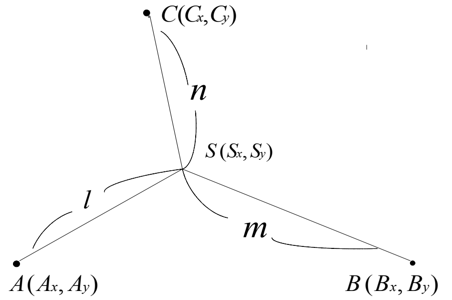

Fig. 1. Three frontlines A, B, C and strategic base S

점 A, B, C와 S의 좌표를 각각 (A_x,A_y), (B_x,B_y), (C_x,C_y) 및 (s_x,s_y)라 하고 점 A, B, C와 점 S를 연결하는 선분을 각각, l, m, n이라 하자.

그러면,

$$l=\sqrt{(A_x-s_x)^2+(A_y-s_y)^2} \tag{1}$$

$$m=\sqrt{(B_x-s_x)^2+(B_y-s_y)^2} \tag{2}$$

$$n=\sqrt{(C_x-s_x)^2+(C_y-s_y)^2} \tag{3}$$

가 되고, 점 A, B, C를 연결하는 거리의 합 $l+m+n$이 최소가 되는 지점 S의 좌표를 찾기 위한 아래의 최적화 수식을 세울 수 있다[1,2].

$$Minimize\ \ l+m+n \tag{4}$$

s.t.

$$\begin{aligned} l&=\sqrt{(A_x-s_x)^2+(A_y-s_y)^2} \\ m&=\sqrt{(B_x-s_x)^2+(B_y-s_y)^2} \\ n&=\sqrt{(C_x-s_x)^2+(C_y-s_y)^2} \end{aligned} \tag{5}$$

3. 직각이등변삼각형 세 꼭지점의 최단거리 연결

편이상 두 변의 길이가 L인 Fig. 2와 같은 직각 이등변삼각형 △AOB의 경우를 예로 들어보자. O 점을 원점에 두고 A, B 점을 y 및 x 축에 위치시키면, 점 A, O, B의 좌표는 각각 $(0,L)$, $(0,0)$, $(L,0)$로 주어진다.

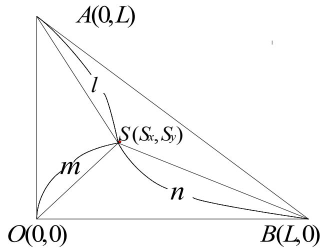

Fig. 2. An isosceles right triangle

점 A, O, B를 연결하는 거리가 최소가 되는 지점 S의 좌표 (s_x,s_y)는 아래의 최적화 수식을 풀어 구할 수 있다.

$$Minimize\ \ l+m+n \tag{6}$$

s.t.

$$l^2=s_x^2+(L-s_y)^2 \tag{7}$$

$$m^2=s_x^2+s_y^2 \tag{8}$$

$$n^2=(L-s_x)^2+s_y^2 \tag{9}$$

Lagrange dual function은

$$\begin{aligned} D=&\,l+m+n \\ &+\lambda[s_x^2+(L-s_y)^2-l^2] \\ &+\mu(s_x^2+s_y^2-m^2) \\ &+\xi[(L-s_x)^2+s_y^2-n^2] \end{aligned} \tag{10}$$

가 되고 Optimality condition은

$$\begin{aligned} \frac{\partial D}{\partial s_x}=&\frac{1}{2}[s_x^2+(L-s_y)^2]^{-\frac{1}{2}}\cdot 2s_x+\frac{1}{2}(s_x^2+s_y^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot 2s_x \\ &+\frac{1}{2}[(L-s_x)^2+s_y^2]^{-\frac{1}{2}}\cdot(-2)(L-s_x)=0 \end{aligned} \tag{11}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial D}{\partial s_x}=&\frac{1}{2}[s_y^2+(L-s_x)^2]^{-\frac{1}{2}}\cdot 2s_y+\frac{1}{2}(s_x^2+s_y^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot 2s_y \\ &+\frac{1}{2}[(L-s_y)^2+s_x^2]^{-\frac{1}{2}}\cdot(-2)(L-s_y)=0 \end{aligned} \tag{12}$$

로 주어진다.

식 (11), (12)를 풀면 점 A, O, B를 연결하는 거리가 최소가 되는 점 S의 좌표

$$(s_x, s_y) = (0.211L,\ 0.211L) \tag{13}$$

을 찾을 수 있다. 또한

$$l = \sqrt{(L-s_x)^2 + s_y^2} = 0.8165L \tag{14}$$

$$m = \sqrt{s_x^2 + s_y^2} = 0.2989L \tag{15}$$

$$n = \sqrt{s_x^2 + (L-s_y)^2} = 0.8165L \tag{16}$$

가 되고, A, O, B와 S를 연결하는 최단거리는

$$l + m + n = 1.9319L \tag{17}$$

이 된다.

4. Steiner Tree를 이용한 직각이등변삼각형 세 꼭지점의 최단거리 연결

Steiner tree problem은 유한개의 점을 연결하는 최소 길이의 path를 찾는 이론이다. 모든 점을 잇는 최소길이의 tree를 Steiner(minimal) tree라 부른다.

세 점의 경우 Steiner point라 불리는 한 개의 점(extra point)을 추가하고 여기에 연결되는 세 가지(branch)가 만드는 각도가 각각 120°가 될 경우 세 점을 연결하는 path가 최소가 됨을, 스위스의 수학자 Steiner(1796~1863)가 증명하였다.

Fig. 3의 S가 Steiner point이며 선분 AS, OS, BS가 만드는 각도가 각각 120°가 될 경우 AS+OS+BS의 길이는 최소가 된다[3~7].

Fig. 2와 식 (14)~(16)으로부터 S 점에서 l, m, n이 만드는 각도를 계산해 보자.

$$\angle ASO = \cos^{-1}\frac{L^2 - l^2 - m^2}{2lm} = 120^\circ \tag{18}$$

$$\angle OSB = \cos^{-1}\frac{L^2 - m^2 - n^2}{2mn} = 120^\circ \tag{19}$$

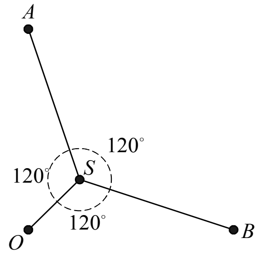

Fig. 3. Steiner point S

$$\angle BSA = \cos^{-1}\frac{2L^2 - n^2 - l^2}{2nl} = 120^\circ \tag{20}$$

로서 세 점 A, O, B를 연결하는 길이 $l+m+n$가 최소가 되는 점 S에서 세 선분 l, m, n가 만드는 각도는 각각 120°가 되는 것을 볼 수 있다. 최적화로부터 구해진 Fig. 2의 결과가 Steiner tree 이론과 부합됨을 확인할 수 있다.

직사각형의 네 꼭지점을 모두 연결하는 가장 짧은 path는 대각선이며 대각선의 교차점(중심점)이 네 꼭지점을 가장 짧게 연결하는 점이라는 것이 일반적인 상식이다. 그러나, 이는 사실이 아니다. 다음의 예로부터 알 수 있는 바와 같이 두개의 Steiner point를 이용하면 더욱 짧은 path를 얻을 수 있다. Fig. 4는 직사각형이며 선분 AC, BD는 대각선이다. 계산의 편의상 가로를 5, 세로를 $2\sqrt{3}$으로 가정하자.

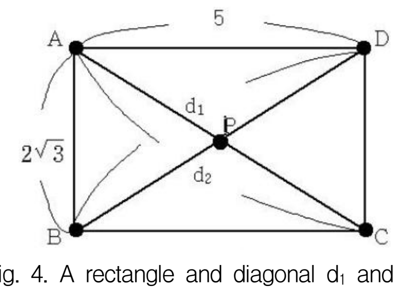

Fig. 4. A rectangle and diagonal d_1 and d_2

중심점 P에서 점 A, B, C, D를 연결하는 선분 PA, PB, PC, PD의 길이의 합은

$$2 \times \sqrt{5^2 + (2\sqrt{3})^2} = 12.165 \tag{21}$$

이 된다. Fig. 5의 S_1 점은 A, B, P 점의 Steiner point, S_2 점은 C, D, P 점의 Steiner point 이다.

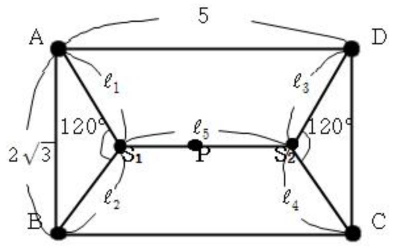

Fig. 5. A rectangle and Steiner points S_1 and S_2

네 점 A, B, C, D와 S_1, S_2 점을 연결하는 선분 AS_1, BS_1, S_1S_2, CS_2, DS_2,의 길이의 합은

$$2 + 2 + 3 + 2 + 2 = 11 \tag{22}$$

이 된다. 두 개의 Steiner point를 통하여 연결되는 path가 두 대각선의 길이 보다 더 짧음을 알 수 있다[6,7].

직각이등변삼각형의 경우, Steiner tree 이론을 이용하면 세 꼭지점을 최단거리로 연결하는 점 S를 더욱 편리하게 구할 수 있다. Fig. 6에서 점 S는 세 점 A, O, B를 120°로 연결하는 Steiner point 이다.

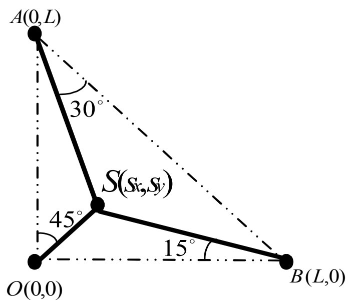

Fig. 6. Steiner point S in isosceles right triangle

Steiner point의 좌표를 $(s_x,\ s_y)$라 하면,

$$s_x = s_y = \frac{\tan 15}{1+\tan 15} L = 0.211L \tag{23}$$

로서 최적화기법으로 계산한 식 (13)과 동일한 결과를 얻을 수 있다.

우리나라 지도상의 예를 들어, Fig. 7과 같이 강화군 내가, 영광군 홍농, 울주군 온양의 세 지점을 최단거리로 연결하는 전략기지의 위치를 찾아보자.

주어진 거리가

- 강화군 내가-영광군 홍농 300 km,
- 영광군 홍농-울주군 온양 300 km,
- 강화군 내가-울주군 온양 $300\sqrt{2}$ km

이므로, 식 (13)을 적용하면, 세 지점을 최단거리로 연결하는 전략기지의 위치는 영광군 홍농으로 부터 x 축 및 y 축으로 63.3 km 지점인(0.211*300 = 63.3) 금산군 복수면 부근이 될 것이며,

세 지점과 전략기지를 연결하는 최단거리는 식 (17)로부터 약 579.5 km(0.9319*300 = 579.5)가 될 것이다.

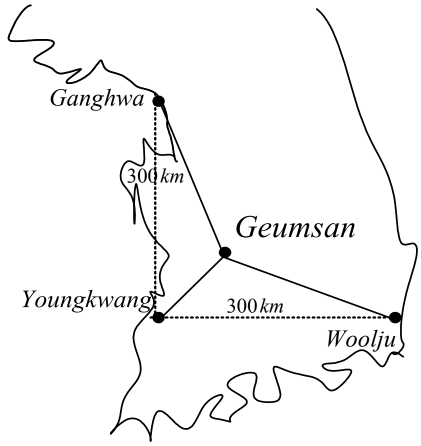

Fig. 7. Finding a strategic base minimally connecting Ganghwa, Youngkwang and Woolju

세 점을 최단거리로 연결하는 점(또는 steiner point)의 좌표를 찾는 것은 N≥3 개의 점을 연결하는 최단거리 path를 찾는데 있어 가장 기초적으로 수행되는 절차이다[3~6].

5. 결 론

본 논문은 세 개 지점의 Frontline을 기하학적으로 가장 짧게 연결하는 전략기지의 위치를 찾는 방법을 소개하였다. 세 개 지점을 연결하는 거리를 최소화 하는 전략기지의 좌표를 최적화 기법을 이용하여 찾는 일반식을 소개하고, 직각 이등변 삼각형의 경우를 예로 들어 계산해 보았다. Steiner tree 이론을 간단히 소개하고 연산결과가 최적화 기법을 사용한 경우와 일치함을 확인하였다.

후 기

This study was financially supported by Seoul National University of Science & Technology.

References

[1] Bazaraa M, Shetty CM, “Nonlinear Programming Theory and Algorithms”, John Wiley & Sons Inc., pp. 175～214, 1979.

[2] Sang-Joong Lee, “Calculation of Optimal Generation for System Loss Minimization Using Loss Sensitivities Derived by Angle Reference Transposition”, IEEE Trans on Power Sys, Vol. 18, No. 3, pp. 1216～1217, Aug. 2003.

[3] R. Courant & H. Robbins, “What is Mathematics? Oxford University Press”, New York, pp. 354～360, 1941.

[4] Z. A. Melzak, “On the Problem of Steiner”, Canad. Math. Bull. 4, pp. 143～148, 1960.

[5] T. W. Ruijgrok, “The Exact Solution of a Three-body Problem, European Journal of Physics, Vol. 5, pp. 21～24, 1984.

[6] 양성덕, 유응규, 이상중, “Steiner Tree 이론을 이용한 우편물 교환센터의 최적위치 선정”, 조명전기설비학회 논문집, Vol. 22, No. 9, pp. 82～87, Sep. 2008.

[7] 이상중, 윤준영, “전선의 최단거리 루트 선정을 통한 공사비용 절감 방안”, 조명전기설비학회 논문집, Vol. 25, No. 5, pp. 34～38, May 31. 2011.