

슬라이딩 모드 제어기법을 이용한 도립진자 시스템 제어

한상완^{1*}, 박민호¹

¹충남도립청양대학 전기전자과

A Sliding Mode Control Scheme for Inverted Pendulum System

Sang-Wan Han^{1*} and Minho Park¹

¹Electrical & Electronics Engineering, Chungnam Provincial Cheongyang College

요 약 슬라이딩모드 제어의 문제는 제어입력에 포함된 알려지지 않은 외란 등 비선형 입력으로 인한 채터링의 발생이다. 본 연구는 채터링 발생의 문제를 해결하기 위한 제어 알고리즘에 대하여 고찰하고 채터링을 억제하는 슬라이딩모드 제어기를 설계하고자 한다. 슬라이딩모드 제어 시 발생하는 채터링을 억제하기 위해 알려지지 않은 외란을 포함한 비선형 입력에 대하여 평활함수를 적용한다. 이 방법에 의하여 도립진자 시스템의 동적 방정식에 포함된 비선형 요소와 외란에 의한 문제가 해결될 수 있음을 보인다. 또 슬라이딩모드 제어를 위한 제어 입력을 시스템에 적용하였고, 제안한 제어기의 제어성능을 검증하기 위하여 도립진자를 대상으로 컴퓨터 모의실험을 수행하였다. 모의실험 결과 제어입력에 포함된 큰 폭의 채터링이 제거되었음을 확인할 수 있다.

Abstract A problem of sliding mode control is chattering because of control input signal included unknown disturbance and nonlinear input parameters. This paper presents a sliding mode controller design to inverted pendulum system. In this paper, a sliding mode control algorithm to reduce a chattering is proposed. The reduction of chattering is accomplished by smoothing function for nonlinear control input. In this method, the dynamic equations of the inverted pendulum is decoupled by considering nonlinear parameters and external disturbances. Therefore, this study is applied to obtain switching control inputs for sliding mode controller. The proposed technique is tested to the control of inverted pendulum through computer simulations. The result shown reduced chattering in control input.

Key Words : Chattering, Decoupled, Disturbance, Inverted Pendulum, Nonlinear Control Input, Sliding Mode Controller, Smoothing Function

1. 서론

대표적인 불안정한 시스템인 도립진자는 제어시스템의 제어 성능을 확인하기 위한 대상으로 널리 활용되고 있다. 제어대상으로 활용되는 도립진자의 종류는 직선운동형과 원운동형이 있다. 직선운동형의 경우 직선운동의 거리에 제약을 갖는 단점이 있지만, 대부분의 도립진자 시스템은 직선운동형으로 운반체 위에 수직으로 진자를 세운 형태를 하고 있으며, 운반체의 직선 왕복 운동으로 진자를 안정하게 세우는 것이 목적이다. 마치 손위에 막 대기를 올려놓고 쓰러지지 않도록 손을 움직이던 것을

기계적으로 구현하려는 것이다. 로켓을 바로 세워놓기 위한 연구에서 시작된 도립진자는 수중에서 발사된 어뢰의 자세제어나 보행 로봇의 관절제어, 주행하는 탱크에서 목표물을 조준하기 위한 포신제어 등에 응용할 수 있다 [4-6,10].

또한 도립진자는 비선형 모델로 선형 제어기를 설계하기 위해 비선형인 수식적 모델이 선형화 되어야 한다. 본 연구의 제어대상은 전형적인 SIMO(Single Input Multiple Output) 형태의 다변수 시스템으로 상태공간에서의 해석이 필요하다[9].

그동안 보다 개선된 제어성능을 얻기 위하여 PID 제

*Corresponding Author : Sang-Wan Han (Chungnam Provincial Cheongyang College)

Tel : +82-10-5040-1257 email: swhan@cyc.ac.kr

Received January 16, 2014 Revised February 4, 2014 Accepted February 5, 2014

어, 상태궤환제어, 최적제어, 강인제어 및 퍼지제어 등 여러 가지 알고리즘을 적용하는 많은 연구가 이루어져왔다 [4,10,16].

특히 슬라이딩모드제어(SMC : Sliding Mode Control)는 파라미터의 변화 등 모델이 불확실하거나 외란의 변화에도 강인한 제어성능을 갖는다[1-3,7-9]. 그러나 슬라이딩모드 제어기는 상태변수를 완전히 측정할 수 없고, 불확실성에 대한 한계를 알고 있다는 전제하에 무리한 설계를 하는 것이 일반적이기 때문에 제어성능의 급격한 저하를 초래한다. 이러한 문제는 상태변수 관측기를 사용하여 일부의 측정값으로부터 미지의 상태변수를 추정함으로써 해결할 수 있다. 제어기 설계 시 이와 같은 문제들을 극복하기 위한 여러 가지 방법들이 제안되고 있고, 제어입력과 관계된 외란을 예측하기 위해 다양한 종류의 외란 관측기들이 사용되고 있다[7-9].

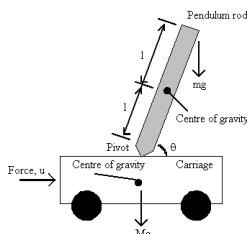
1994년 Kozek 등은 슬라이딩모드 제어에 선형 외란관측기를 추가하여 고속 전자기 시스템의 강인제어에 대하여, 1995년 Lu 등은 시스템 모델의 불확실성과 외란을 예측하기 위한 섭동관측기를 제안하여 전자기 부상 시스템의 제어를, 그리고 Liu 등은 시스템의 불확실성과 파라미터의 변화를 외란으로 간주하여 이를 예측하기 위한 관측기를 설계하였다[8,11-15].

본 연구에서는 대표적인 불안정한 시스템인 도립진자 시스템의 수식적 모델링을 행하고 그 모델을 대상으로 Sliding Mode Control에 기초한 강인제어기법을 제안한다.

2. 도립진자의 수식적 모델링

2.1 동적 모델링

제어대상으로 널리 사용되는 도립진자는 직선 왕복운동을 할 수 있는 운반체 위에서 1자유도로 운동하는 구조로 Fig. 1과 같다. 직선운동을 하는 운반체의 질량이 M , 진자봉의 질량이 m , 길이가 l , 운반체에 가한 힘을 u , 이동한 거리를 y , 진자봉의 회전 각도를 θ 라고 할 때 관계식을 구하면 다음과 같다.



[Fig. 1] Inverted Pendulum System

$$(M+m)\ddot{y}+ml\ddot{\theta}=u \tag{1}$$

$$ml\ddot{y}+(J+ml^2)\ddot{\theta}-mgl\theta=0 \tag{2}$$

여기서 도립진자의 의 관성 모멘트(J)를 고려하면 동역학 식은

$$(M+m)\ddot{y}+ml\ddot{\theta}=u \tag{3}$$

$$ml\ddot{y}+\frac{4}{3}ml^2\ddot{\theta}-mgl\theta=0 \tag{4}$$

가 된다. 단, 운반체가 움직이는 동안의 마찰력과 진자가 떨어질 때의 마찰력은 무시한다.

2.2 상태 공간 모델

도립진자 시스템의 상태 공간 모델을 구하기 위해서는 도립진자의 동역학과 운반체를 구동하는 DC모터의 동역학을 고려해야 한다. 운반체에 사용한 DC모터의 동역학은 모터의 토크가 T , 역기전력이 V_{emf} , 전기자 전류가 i_a , 인가전압이 e , 전기자저항이 R_a , 각속도가 ω , 전기적 상수가 K_1 이고, 기계적 상수가 K_2 일 때 다음과 같다.

$$T=\frac{K_1e-K_1K_2w}{R_a} \tag{5}$$

여기서 플리의 반지름을 r , 플리에 가해지는 힘을 F 라 하면 $T = rF$ 이므로

$$F=\frac{K_1e-K_1K_2w}{R_a r}, \quad w=\frac{\dot{y}}{r} \tag{6}$$

이 된다. 이때 식(3)의 u 와 식(6)의 F 가 같으므로 식(3)은 다음과 같이 식(7)이 된다.

$$(M+m)\ddot{y}+ml\ddot{\theta}=\frac{K_1e-K_1K_2\dot{y}}{R_a r} \tag{7}$$

또, 식(4)를 \ddot{y} 에 대해 정리하면 다음 식이 된다.

$$\ddot{y}=g\theta-\frac{4}{3}l\ddot{\theta} \tag{8}$$

여기서 식(8)을 식(6)에 대입하여 정리하고 식(8)을 $\ddot{\theta}$ 에 대해 정리하면

$$-\frac{1}{3}R_a r l(4M+m)\ddot{\theta} + R_a r(M+m)g\theta + K_1 K_2 \frac{1}{r} \dot{y} = K_1 e \quad (9)$$

$$\ddot{\theta} = \frac{3}{4l}(g\theta - \ddot{y}) \quad (10)$$

이 되고, 이들로부터 다음의 식(11)과 같은 동역학 식을 얻을 수 있다.

$$R_a r(M + \frac{1}{4}m)\ddot{y} + K_1 K_2 \frac{1}{r} \dot{y} + \frac{3}{4}R_a g\theta = K_1 e \quad (11)$$

식(9)와 (10)에서 상태 변수를 $x = [y \ \theta \ \dot{y} \ \dot{\theta}]^T$ 로 하여 상태방정식을 구하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{-3mg}{4M+m} & \frac{-K_1 K_2}{R_a r^2(M + \frac{m}{4})} & 0 \\ 0 & \frac{3(M+m)g}{l(4M+m)} & \frac{3K_1 K_2}{R_a r^2 l(4M+m)} & 0 \end{bmatrix} x \\ &+ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{K_1}{R_a r(M + \frac{m}{4})} \\ \frac{-3K_1}{R_a r l(4M+m)} \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x \end{aligned} \quad (13)$$

3. 슬라이딩모드 제어기

3.1 슬라이딩 모드 제어

슬라이딩모드 제어기는 상태변수가 슬라이딩평면에 도달하면 외란이나 파라미터의 변동과 관계없이 원하는 동작을 할 수 있는 강인 제어기의 구현이 가능하다. 따라서 우선 안정성이 보장된 슬라이딩평면을 결정하고 시스템의 상태변수가 슬라이딩평면에 도달하여 그 평면을 따

라 움직일 수 있도록 제어입력을 설계하는 것이 설계의 관건이다. 이때 슬라이딩평면 S 는 시스템의 상태변수 (x) 로 나타낼 수 있어야 한다[1,7-9].

본 연구에서 제안하는 슬라이딩모드 제어기법은 시스템의 상태가 임의의 초기 값에서 출발하여 슬라이딩평면 S_0 에 이르기까지 슬라이딩모드를 일으키지 않고 있다가 S_0 의 영역에 들어간 후 한꺼번에 슬라이딩모드를 발생한다. 이때 슬라이딩모드 제어입력은 다음과 같이 상태피드백 제어입력 u_f 과 비선형 제어입력 u_{nl} 등 독립된 두 개의 항으로 되어있다.

$$u = u_f + u_{nl} = -Fx - k(x,t) \frac{\sigma}{\|\sigma\|} \quad (14)$$

여기서 $F = (SB)^{-1}SA$ 로 하면 u_f 은 등가 제어입력 u_{eq} 가 된다. 상태영역이 S_0 영역의 밖에 존재할 때 이 상태피드백 제어입력이 절환면으로 수렴하는 속도를 조정하는 역할을 한다. 다음은 슬라이딩모드가 존재하기 위한 조건이다.

$$u = -(SB)^{-1}SAx - k(x,t) \frac{\sigma}{\|\sigma\|} \quad (15)$$

만일 위와 같은 슬라이딩모드가 존재할 조건을 만족할 때 제어입력은 Lyapunov 함수에 의해 결정되므로 $\sigma \rightarrow 0$ 을 실현하기 위해 σ 에 관해 Lyapunov 함수 후보를 다음과 같이 선택한다.

$$V = \sigma^T \sigma / 2 \quad (16)$$

$$\dot{V} = \sigma^T \dot{\sigma} / 2 = \sigma^T SAx + \sigma^T SBu \quad (17)$$

위의 식 (15)를 식 (17)에 대입하면 슬라이딩모드가 존재할 조건은 다음과 같다.

$$\dot{V} = -k(x,t)SB \frac{\sigma^2}{\|\sigma\|} < 0 \quad (18)$$

따라서 $SB > 0$ 일 때 $k(x,t) > 0$, $SB < 0$ 일 때 $k(x,t) < 0$ 로 선택하면 안정된 슬라이딩모드 제어를 할 수 있다. 그러나 이 방법은 제어입력이 심하게 절환되어 채터링 발생의 문제를 갖고 있다.

3.2 채터링 방지 설계

실제의 시스템에서 연속시간 제어를 하는 경우 아날로그 절환장치에는 반드시 시간지연이나 히스테리시스 특성이 존재한다. 뿐만 아니라 디지털 제어의 경우에는 샘플링 주기로 인한 시간지연 현상이 존재한다. 이러한 경우 슬라이딩모드는 절환면을 미끄러지지 못하고 채터링(진동)하게 된다. 또한 제어대상을 모델링할 때 무시하였던 고주파 영역이 입력의 고속절환에 의해 진동함으로써 시스템을 불안정하게 할 수 있으므로 제어입력의 채터링을 억제할 필요가 있다.

단일 입·출력 시스템인 경우 채터링이 발생하지 않도록 하기 위하여 식(14)의 비선형 제어입력에 대하여 고려면 비선형 입력은 다음과 같다.

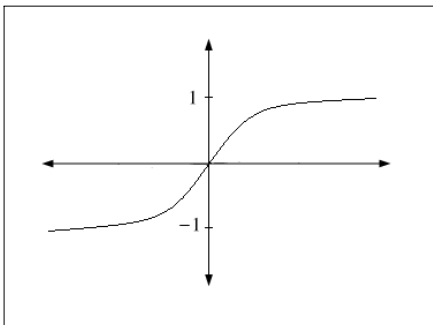
$$u_{nl} = -K \operatorname{sgn}(\sigma) = -K \frac{\sigma}{|\sigma|} \quad (19)$$

그러나 식(19)에서 구한 비선형 제어입력을 사용하면 시스템에 채터링이 발생함을 알 수 있다. 따라서 채터링 제거를 위해 다음과 같은 평활 절환 초평면 함수를 비선형 제어 입력으로 사용한다.

$$u_{nl} = -K \frac{\sigma}{|\sigma| + \delta} \quad \delta > 0 \quad (20)$$

그리고 도립진자와 같이 다 입력 다 출력 시스템인 경우 비선형 제어입력은 다음과 같고, 평활 절환 초평면 함수는 Fig. 2와 같다.

$$u_{nl} = -K \frac{\sigma}{\|\sigma\| + \delta} \quad \delta_i > 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m) \quad (21)$$



[Fig. 2] Smoothing Switching Hyper-plane Function

4. 모의실험 및 결과검토

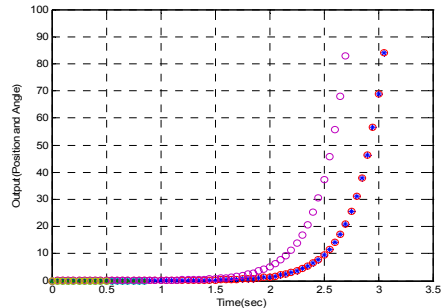
4.1 모의실험

제한한 제어기의 성능을 확인하기 위하여 도립진자 시스템의 파라미터를 Table 1과 같이 설정하였다. 본 시스템은 제어기, 구동부, 센서 및 제어대상으로 구성되어있다.

[Table 1] Parameter Using Simulation

Parameter	Value	Unit
r	0.03	m
M	0.40	Kg
m	0.10	Kg
l	0.50	m
K1	0.06	Nm/A
K2	0.07	V/rad/sec
Ra	2.23	Ohm
g	9.80	m/sec

Fig. 3은 일정한 크기의 입력을 지속적으로 증가할 경우 수레의 위치변화와 도립진자의 각도 변화를 보인다. 결과적으로 도립진자 시스템은 Fig. 3과 같이 일정한 크기의 입력을 증가하면 진자의 각도와 대차의 위치가 시간의 경과에 따라 발산함을 알 수 있다. 따라서 진자를 대차 위에 수직으로 세우기 위해서는 적절한 제어기의 설계가 절실히 요구됨을 알 수 있다.

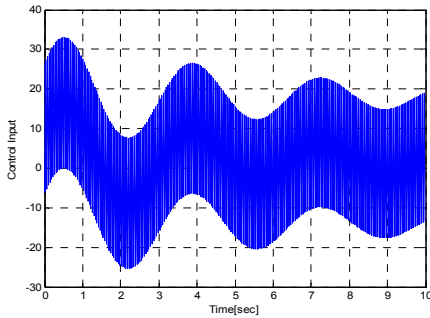


[Fig. 3] Response of Inverted Pendulum

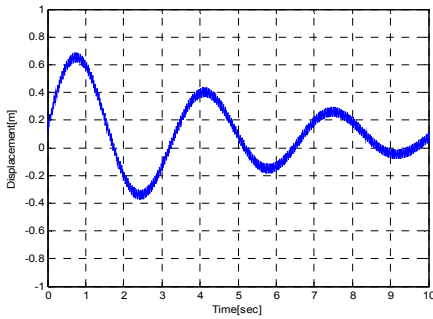
4.2 결과검토

모의실험 결과가 Fig. 4와 같다. Fig. 4(a)는 제어입력으로 매우 많은 채터링이 발생함을 보인다. 그에 따라 대차의 변위 Fig. 4(b)에서도 채터링의 현상이 나타남을 알 수 있다. Fig. 4(c)는 도립진자가 움직인 각도의 변화를 나타내며 시간이 지남에 따라 안정점으로 수렴함을

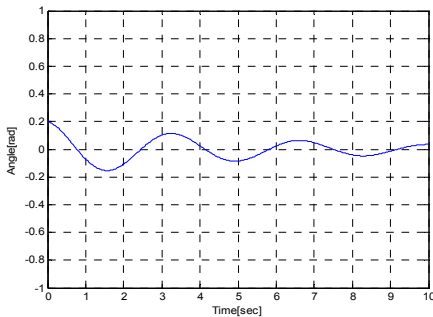
볼 수 있다. 그러나 결국 도립진자를 제어하기 위한 제어입력의 채터링이 시스템 전체에 영향을 미침을 볼 수 있다.



(a) Control Input



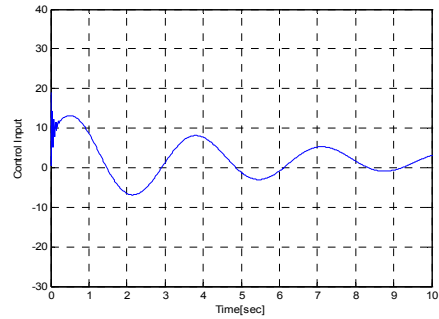
(b) Position of Cart



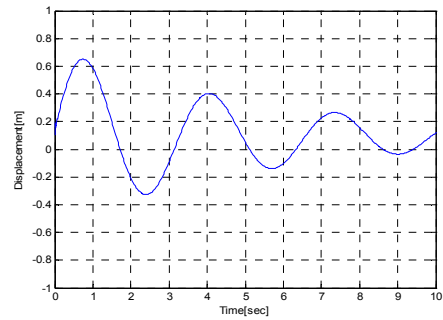
(c) Angle of Pendulum

[Fig. 4] Result of Proposed Sliding Mode Controller

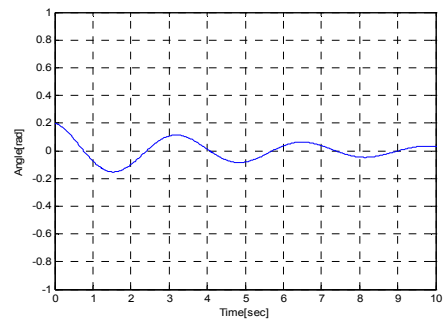
모의실험 결과 Fig. 5는 Fig. 4에서 문제가 되었던 심각한 채터링을 제거한 결과를 보인다. Fig. 5의 (a)는 Fig. 4의 (a)에서 보이던 채터링이 거의 사라졌음을 보인다. 또한 Fig. 5의 (b)와 (c) 에서도 채터링이 제거되었음을 확인할 수 있다.



(a) Control Input



(b) Position of Cart



(c) Angle of Pendulum

[Fig. 5] Result of Sliding Mode Controller Using Smoothing function

5. 결론

본 논문에서는 대차의 직선운동에 의하여 진자가 도립하는 직선운동형 도립진자시스템의 동역학 방정식과 상태방정식을 구하고 도립진자를 제어하기 위한 슬라이딩모드 제어기법을 제안하였다. 모의실험 결과 제안한 슬라이딩모드 제어기에서 비선형 제어입력에 의한 채터링이 발생함을 확인할 수 있었다.

따라서 채터링 방지를 위한 제어기 설계가 요구 되었고, 그를 위하여 평활 절환 초평면 함수를 비선형 제어 입력으로 사용함으로써 채터링을 제거하였다. 모의실험 결과 도립진자가 점진적으로 안정한 상태에 도달함을 보임으로써 제안한 슬라이딩모드 제어기가 원하는 제어 성능을 갖고 있음을 확인하였다. 그러나 도립진자가 안정 상태에 도달하는 시간을 10초 이내로 단축할 수 없었다. 따라서 추후로 채터링 문제의 해결과 더불어 도립진자가 보다 빨리 안정 상태에 도달할 수 있도록 응답 시간을 단축하는 연구를 계속 진행하고자 한다.

References

- [1] Utkin, V. I. "Variable Structure Systems with Sliding Modes", *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 22, no. 2, pp. 212~222, 1977.
DOI: <http://dx.doi.org/10.1109/TAC.1977.1101446>
- [2] Young, K. K. D., "Controller Design for Manipulator Using Theory of Variable Structure Systems", *IEEE Transactions on System, Man and Cybernetics*, vol. 8, no. 2, pp. 101~109, 1978.
DOI: <http://dx.doi.org/10.1109/TSMC.1978.4309907>
- [3] Slotine, J. J. and Sastry, S. S., "Tracking Control of Non-linear Systems Using Sliding Surface with Application to Robot Manipulators", *International Journal of Control*, vol. 38, pp. 465~492, 1983
DOI: <http://dx.doi.org/10.1080/00207178308933088>
- [4] Gert-Wim van der Linden and Paul F. Lambrechts, "H_∞ Control of an Experimental Inverted Pendulum with Dry Friction", *IEEE Control Systems*, pp.44-50, August 1993.
DOI: <http://dx.doi.org/10.1109/37.229559>
- [5] Gert-Wim van der Linden and Paul F. Lambrechts, "H_∞ Control of an Experimental Inverted Pendulum with Dry Friction", *IEEE Control Systems*, pp.44-50, August 1993.
- [6] John Nelson and L. Gordon Kraft, "Real Time Control of Inverted Pendulum System Using Complementary Neural Network and Optimal Techniques", *Proceedings of the American Control Conference Baltimore, Maryland*, pp. 2553-2554, June 1994.
- [7] Choi, S. B., Park, D. W. and Jayasuriya, S., "A Time-Varying Sliding Surface for Fast and Robust Tracking Control of Second-Order Uncertain Systems", *Automatica*, vol. 30, no. 5, pp. 899~904, 1994.
DOI: [http://dx.doi.org/10.1016/0005-1098\(94\)90180-5](http://dx.doi.org/10.1016/0005-1098(94)90180-5)
- [8] Lee, M. C., Jin, S. Y. and Lee, M. H., "A Study on the Trajectory Control of a SCARA Robot Using Sliding Mode", *Journal of Mechanical Science and Technology*, vol. 19, no. 1, pp. 99~110, 1995.
- [9] M. C. Lee, K. T. Shin, "Development of a Dynamic Simulator for SCARA Robot Using Sliding Mode Control", *Journal of Mechanical Science and Technology*, vol. 21, no. 4, pp. 535-548, 1997
- [10] Bernhard Sprenger, Ladislav Kucera, and Safer Mourad, "Balancing of an Inverted Pendulum with a SCARA Robot", *IEEE/ASME Transaction on Mechatronics*, vol.3, no. 2, pp.91-97, June 1998.
DOI: <http://dx.doi.org/10.1109/3516.686676>
- [11] Young, K. D., Utkin, V. I. and Ozguner, U., "A Control Engineer's Guide to Sliding Mode Control", *Control System Technology, IEEE Transactions*, vol. 7, no. 2, pp. 328~342, 1999.
DOI: <http://dx.doi.org/10.1109/87.761053>
- [12] Park, D. W and Choi, S. B., "Moving Sliding Surfaces for High-Order Variable Structure Systems", *International Journal of Control*, vol. 72, pp. 960~970, 1999.
DOI: <http://dx.doi.org/10.1080/002071799220506>
- [13] J. W. Cheon, S. B. Choi, H. J. Song, J. H. Ham, "Position Control of AC Servo Motor Using Sliding Mode Control", *Journal of The Korean Society of Precision Engineering*, Vol. 12, No. 3, pp. 44-50, March, 2004
- [14] S. J. Lee, H. Park, K. S. Hong, "Sliding-Mode Control of Container Cranes", *Journal of Korean Navigation and Port Research*, vol. 29, no. 8, pp. 747-753, 2005
DOI: <http://dx.doi.org/10.5394/KINPR.2005.29.8.747>
- [15] Lee, J. H., "Seismic Control of Tuned Mass Damper System with MDOF Sliding Mode Control Accounting for the Uncertainties", *Journal of the Korea Institute for Structural Maintenance and Inspection*, vol. 15, no. 1, pp. 235-242, 2011
- [16] F. L. Lewis. "Applied Optimal Control & Estimation", Prentis Hall, 1992.

한 상 완(Sang-Wan Han)

[정회원]



- 1991년 8월 : 아주대학교 대학원 제어공학과 (공학석사)
- 1999년 2월 : 아주대학교 대학원 전자공학과 (공학박사)
- 1999년 3월 ~ 현재 : 충남도립 청양대학 전기전자과 부교수

<관심분야>

제어계측, 로보틱스, 공장자동화

박 민 호(Minho Park)

[정회원]



- 1993년 2월 : 아주대학교 대학원 제어계측공학과 (공학석사)
- 1993년 3월 ~ 1998년 6월 : (주) 한미반도체 연구원
- 2007년 8월 : 아주대학교 대학원 전자공학과 (공학박사)
- 2008년 3월 ~ 현재 : 충남도립 청양대학 전기전자과 조교수

<관심분야>

최적제어, Robust Control, 공장자동화