

# 불포화토에 대한 반복삼축압축시험의 요소시물레이션을 위한 응력-변형을 관계의 수립

이충원\*

<sup>1</sup>국민안전처 국가민방위재난안전교육원

## Inducing stress-strain relationship for element simulation of cyclic triaxial test on unsaturated soil

Chung-Won Lee<sup>1\*</sup>

<sup>1</sup>National Civil Defense and Disaster Management Training Institute, Ministry of Public Safety and Security

**요 약** 부(-)의 간극수압으로서 불포화토 내에 작용하는 석션은 입자간 응력을 증가시키며, 이에 따라 토립자 골격의 항복응력 및 소성전단강성을 증대시키는 등, 불포화토의 역학적 특성에 지대한 영향을 미친다. 따라서, 본 연구에서는 이러한 석션의 효과를 지진 등의 동적 하중조건에서 고려하기 위하여 불포화토에 대해 확장된 반복탄소성구성식에 근거한 응력-변형률 관계를 제 1 항복함수 및 제 2 항복함수를 고려하여 유도하였다. 본 관계를 2차원 및 3차원 수치해석에서 액상화 이후의 압밀거동 예측 등에 적용하는 경우에는 평균골격응력(Mean skeleton stress)의 변화를 반영하는 제 2 항복함수의 도입이 필요하나, 요소시물레이션에서는 제 1 항복함수만으로도 수치해석을 위한 각 물성치 및 석션 파라미터 결정이 가능할 것으로 사료된다. 본 관계와 응력반전을 반영한 반복재하 루틴을 함께 코딩(Coding)할 경우 불포화조건 하에서의 반복삼축압축시험에 대한 수치해석적 모사가 가능할 것으로 보이며, 본 연구결과는 동적 하중이 작용하는 불포화토 거동 예측의 정확도 제고에 기여할 것으로 전망된다.

**Abstract** In the unsaturated soil, suction, the negative pore water pressure leads to increases of the yield stress and the plastic shear stiffness of the soil skeleton due to the growth in interparticle stress. Therefore, in this study, the stress-strain relationship based on cyclic elasto-plastic constitutive model extended for unsaturated soil considering the 1st and the 2nd yield functions was induced in order to account for these effects of suction under the dynamic loading condition such as the earthquake. Through the program code considering this relationship and the routine of the cyclic loading with the reversion of loading direction, the numerical simulation of the cyclic triaxial test under the unsaturated condition would be possible. It is expected that the results of this study possibly contribute to the accuracy improvement on the prediction of unsaturated soil behavior under the dynamic loading condition.

**Keywords** : Cyclic elasto-plastic constitutive model, Dynamic loading, Element simulation, Stress-strain relationship, Suction

### 1. 서 론

사질토의 동적거동을 표현하는 구성식에는 여러 가지 종류가 제안되어 왔다. 이 때, 지진시의 동적해석을 염두에 둔 경우에는 2차원 및 3차원에 대하여 대응할 수 있

는 객관성을 보유하며, 반복재하 중에 발생하는 일정 수준의 변형률 레벨 (진단변형률 약 10%)을 재현할 수 있는 모델이 필요하다. 본 조건을 만족하는 사질토의 구성법칙으로 Oka et al.[1]의 반복탄소성 구성모델 (Cyclic elasto-plastic constitutive model)이 있다. 본 모델은

\*Corresponding Author : Chung-Won Lee(Ministry of Public Safety and Security)

Tel: +82-41-560-0049 email: kucivil@hanmail.net

Received May 4, 2015

Revised June 15, 2015

Accepted August 6, 2015

Published August 31, 2015

Oka[2]의 모델을 기본으로 하여, Taguchi et al.[3], Tateishi et al.[4]이 보다 다양한 사질토의 반복거동을 재현하기 위하여 여러 가지의 확장을 행한 것이다. 본 구성식에는 다음과 같은 특징이 있다.

- 1) 응력파라미터로서 상대응력비를 일반화한 회전경화[5]를 사용하고 있어, 주응력의 회전 등의 다차원응력상태를 고려할 수 있다.
- 2) 경화법칙으로서 비선형이동경화법칙[6,7]을 사용하고 있어, 반복재하시의 응력반전시에 경화파라미터를 초기화할 필요가 없으므로, 지진시와 같은 랜덤한 재하조건에 대하여 적용성이 높다.
- 3) 경계면으로서 과압밀경계면[8]을 도입하여, 이에 의해 변상응력을 결정함에 의하여 과압밀에 동반되는 다일레이턴시량의 감소 등을 표현할 수 있다.
- 4) 일반화된 유동법칙[9]을 사용함에 의해, 여러 종류의 사질토가 보유하고 있는 응력-다일레이턴시 관계를 재현할 수 있다.
- 5) 소성변형률에 의존하는 전단계수를 사용함에 의해, 전단변형률 10% 정도까지의 사질토의 거동을 재현할 수 있다[3,4].

불포화토에는 부(-)의 압력인 석션 (Suction)이 작용한다. 석션은 입자간 응력을 증가시키며, 항복응력의 증대 및 소성변형에 대한 토립자 골격의 강성을 증대시킨다. 본 모델은 구성식 중의 응력변수로 골격응력 (Skeleton stress)을 사용하며, 석션에 의한 흙의 골격구조 변화를 사질토의 탄소성구성식에 도입함으로써 불포화토에 대하여 확장된 구성식을 사용한다[10].

본 구성모델에서 석션 (Suction)에 대한 영향을 수치해석에서 정확히 고려하기 위해서는 석션 파라미터 (Suction parameter)의 결정이 필요하다. 석션 파라미터는 전체 석션 해방후의 강도저감율 ( $S_{IE}, S_{IBE}$ ), 초기 석션 작용시의 강도증가율 ( $S_I, S_{IB}$ ), 강도변화 속도조절 파라미터 ( $s_d, s_{db}$ )를 말하며, 각 석션 레벨에 대하여 불포화토에 대한 배수-배기 삼축압축시험을 수행한 후, 그 결과를 본 구성모델에 의한 요소시물레이션을 수행하여 근사시킬 수 있는 파라미터를 데이터 조정방법 (Data adjusting method)에 의한 시행착오 (Trial and error)를 통해 구하여야 한다. 특히, 지진 등의 동적 하중 (Dynamic loading)이 작용하는 불포화 지반구조물의 거

동 분석을 위해서는 본 구성모델에 의한 반복삼축압축시험 (Cyclic triaxial test)의 요소 시물레이션이 가능하여야 하나, 현재까지 이에 대한 연구는 미진한 실정이다. 따라서, 본 연구에서는 수치해석을 위한 각 물성치와 함께 석션을 고려한 반복삼축압축시험의 요소시물레이션을 위해, 불포화토에 대하여 확장된 Oka의 반복탄소성구성식에 근거한 응력-변형률 관계를 유도함으로써 석션 파라미터의 합리적 결정 및 동적 하중이 작용하는 불포화토 거동 예측의 정확도 제고에 기여하고자 하였다.

## 2. Oka의 반복탄소성구성식

### 2.1 골격응력

본 모델에서는, 포화 사질토의 구성식을 불포화 사질토로 확장하기 위하여, 응력변수로서 골격응력 (Skeleton stress)  $\sigma'_{ij}$ 를 사용한다[10,11,12,13,14].

$$\sigma'_{ij} = \sigma_{ij} - p^F \delta_{ij} \quad (1)$$

여기서,  $\sigma_{ij}$ 는 전응력텐서,  $p^F$ 는 평균간극압력,  $\delta_{ij}$ 는 Kronecker's delta이다. 평균간극압력  $p^F$ 는 아래의 식으로 표시된다.

$$p^F = S_r p^f + (1 - S_r) p^a \quad (2)$$

여기서,  $S_r$ 은 포화도,  $p^f$ ,  $p^a$ 는 각각 액상, 기상에 가해지는 압력이며, 골격응력텐서의 제1불변량 ( $\sigma'_{11} + \sigma'_{22} + \sigma'_{33}$ )의 1/3을 평균골격응력 (Mean skeleton stress)  $\sigma'_m$ 이라고 한다.

### 2.2 과압밀경계면

일반적으로 사질토는 과압밀상태에 있으며, 전단 초기단계에서는 탄성거동이 탁월하다. 이 때문에, Oka et al.[1]의 반복탄소성모델에서는 의사적 과압밀상태를 상정한 과압밀경계면  $f_b$ 의 개념을 도입하고 있다.  $f_b$ 는 다음의 식으로 나타난다.

$$f_b = \bar{\eta}_{(0)}^* + M_m^* \ln \frac{\sigma'_m}{\sigma'_{mb}} \quad (3)$$

$$\bar{\eta}_{(0)}^* = \left( \eta_{ij}^* - \eta_{ij(0)}^* \right) \left( \eta_{ij}^* - \eta_{ij(0)}^* \right)^{\frac{1}{2}} \quad (4)$$

여기서,  $\eta_{ij}^*$ 는 응력비텐서 ( $\eta_{ij}^* = s_{ij} / \sigma_m'$ ),  $\eta_{ij(0)}^*$ 는 압밀종료시의  $\eta_{ij}^*$ 의 값이다. 또한,  $s_{ij}$ 는 편차응력 텐서 ( $s_{ij} = \sigma_{ij}' - \delta_{ij} \sigma_m'$ )이며,  $M_m^*$ 은 변상응력비 (전단 변형 과정에서 최대 체적압축변형율이 발생하는 시점에서 응력비  $\eta^*$ 의 값,  $\eta^* = (\eta_{ij}^* \eta_{ij}^*)^{1/2}$ )이다.

$f_b < 0$ 의 경우에는 과압밀영역을,  $f_b \geq 0$ 의 경우에는 정규압밀영역을 의미한다. 과압밀영역에서 사질토가 전단을 받는 경우, 일정 범위 내에서 소성체적변형율이 억제되는 응력경로를 그린다. 여기서, 과압밀영역 내에서도 소성변형율이 발생하며, 이에 동반하여 더욱 과압밀영역이 확대 또는 축소되는 것을 고려한다. Fig. 1에 등방압밀종료시의 과압밀경계면을 나타내었다. 여기서, 세로축인  $\sqrt{2J_2}$ 는 편차응력텐서의 제 2 불변량  $J_2 = (s_{ij}s_{ij})/2$ 의 2배의 평방근을 나타내고 있다. 과압밀경계면은 소성체적변형율의 팽창, 수축에 동반한  $\sigma_{mb}'$ 의 변화로 확대 또는 축소된다. 본래 소성체적변형율의 변화에 의한  $\sigma_{mb}'$ 의 변화는 전단에 의한 다일레이턴스에 기인하는 메커니즘에 의한 것이나, 여기에서는 등방압축, 팽윤특성의 파라미터인  $\lambda$ ,  $\kappa$ 를 사용하여 표현하고 있다.  $\sigma_{mb}'$ 는 아래와 같이 나타낸다.

$$\sigma_{mb}' = \sigma_{mbi}' \exp\left(\frac{1+e_0}{\lambda-\kappa} v^P\right) = OCR^* \sigma_{m0}' \exp\left(\frac{1+e_0}{\lambda-\kappa} v^P\right) \quad (5)$$

여기서,  $\sigma_{mbi}'$ 는  $\sigma_{mb}'$ 의 초기치,  $\sigma_{m0}'$ 는 초기평균굴곡응력,  $e_0$ 는 초기간극비,  $\lambda$ 는 압축지수 (등방응력하의 처너재하시의  $e - \ln \sigma_m'$ 의 관계),  $\kappa$ 는 팽윤지수 (등방응력상태에서의 제하 및 재재하시의  $e - \ln \sigma_m'$ 의 관계),  $v^P$ 는 소성체적변형율,  $OCR^*$ 는 의사과압밀비 ( $= \sigma_{mbi}' / \sigma_{m0}'$ )이다.

석션이 변화하면 흙의 특성은 크게 변화한다. 일반적으로, 석션이 감소하면 전단강도가 저하하는 것이 알려져 있다. 본 구성모델에서는 습윤(Wetting), 건조(Drying)에 동반한 석션의 변화를  $\sigma_{mb}'$ 에 도입하였다[1,15].

$$\sigma_{mb}' = \sigma_{mbi}' \exp\left(\frac{1+e_0}{\lambda-\kappa} v^P\right) \left[ S_{IE} + S_I \exp\left\{-s_d \left(\frac{P_i^C}{P^C} - 1\right)\right\} \right] \quad (6)$$

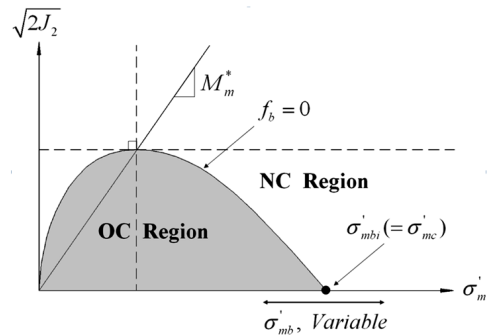


Fig. 1. Overconsolidation boundary surface (Oka et al. 1999)

여기서,  $S_{IE}$ 는 전체 석션 해방후의 강도저감율,  $S_I$ 는 초기석션작용시의 강도증가율,  $s_d$ 는 강도변화속도를 조절하는 파라미터,  $P_i^C$ 는 초기석션,  $P^C$ 는 현재의 석션이다. Fig. 2에 석션과  $\sigma_{mb}'$ 의 변화를 나타내는 모식도를 나타내었으며, Fig. 3에 석션의 효과에 의한 과압밀경계면의 변화의 모식도를 나타내었다. 초기상태로부터 습윤에 의하여 석션해방이 일어나면 강도가 저하되어 과압밀경계면이 축소된다.

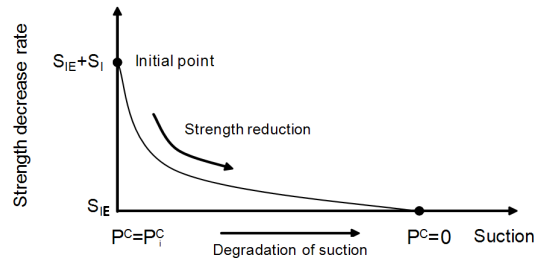


Fig. 2. Schematic figure of strength decrease rate by degradation of suction

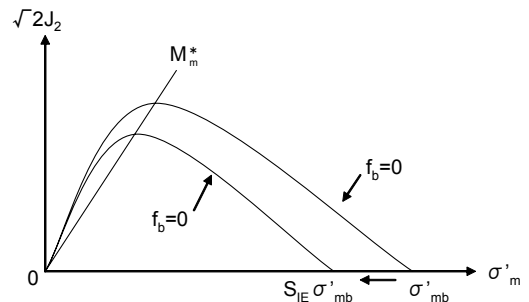


Fig. 3. Schematic figure of shrinkage of overconsolidation boundary surface by degradation of suction

### 2.3 소성전단강성

본 구성모델에서는 소성전단계수를 석선의 함수로 정의하여 석선 변화에 따른 소성의 변화를 통해 토립자 골격의 강성변화를 표현한다. 여기서는 이동경화의 속도를 조정하는 파라미터  $B^*$ 를 정의하며, 이 값이 클수록 경화가 촉진된다. 석선의 영향에 의한 강도변화는 다음 식으로 표현된다.

$$B_{suc}^* = B_0^* \left[ S_{IBE} + S_{IB} \exp \left\{ -s_{db} \left( \frac{P_i^C}{P^C} - 1 \right) \right\} \right] \quad (7)$$

여기서,  $B_0^*$ 는  $B^*$ 의 초기값이며,  $S_{IBE}$ 는 전체 석선 해방후의 강도저감율,  $S_{IB}$ 는 초기석선작용시의 강도증가율이다. 또한,  $s_{db}$ 는 강도변화속도를 조절하는 파라미터,  $P_i^C$ 는 초기석선,  $P^C$ 는 현재의 석선이다.

### 3. 요소시물레이션을 위한 응력-변형률 관계의 유도

본 장에서는 불포화토에 대하여 확장된 Oka의 반복탄소성구성식에 근거하여 요소시물레이션을 위한 응력-변형률 관계를 유도하고자 한다. 경화가 발생하는 탄소성체의 부하함수는 일반적으로 다음과 같이 나타난다.

$$f = f(\sigma_{ij}, \xi_k) \quad (8)$$

여기서,  $\sigma_{ij}$ 는 부하이력을 나타내는 파라미터,  $\xi_k$ 는 항복곡면의 위치와 형상을 나타내는 파라미터로서 초기항복시에  $\xi_k=0$ 이다. 항복곡면의 내부( $f < 0$ )는 탄성상태, 항복곡면상( $f = 0$ )은 소성상태를 나타내며,  $f > 0$ 인 상태는 존재하지 않는다.

어떤 응력상태 ( $\sigma_{ij}$ )로부터 소성유동을 일으키는 미소응력 증분  $d\sigma_{ij}$ 를 받은 상태 ( $\sigma_{ij} + d\sigma_{ij}$ )로 변화하였을 때에 대하여 생각한다. 응력의 변화에 따라  $\xi_k$ 도 변화하므로, 두 상태에서의 항복곡면은 다음 식과 같이 된다.

$$f(\sigma_{ij}, \xi_k) = 0, \quad f(\sigma_{ij} + d\sigma_{ij}, \xi_k + d\xi_k) = 0 \quad (9)$$

항복함수가  $\sigma_{ij}$ 와  $\xi_k$ 에 대하여 미분가능하다면, 식

(9)를 만족하기 위해서는 항복함수의 전미분이 0이어야 한다. 즉, 다음 식을 만족하여야 한다.

$$df = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} + \frac{\partial f}{\partial \xi_k} d\xi_k = 0 \quad (10)$$

본 식을 적합조건(Consistency condition)이라고 한다. 본 연구의 구성모델에서 항복함수는 다음의 식으로 주어지는 스칼라 함수이다.

$$f_{y1} = \left\{ (\eta_{ij}^* - \chi_{ij}^*) (\eta_{ij}^* - \chi_{ij}^*) \right\}^{1/2} - k = 0 \quad (11)$$

$$f_{y2} = M_m^* \left| \ln \left( \frac{\sigma_m}{\sigma_{m0}} \right) - y_m^* \right| - R_d = 0 \quad (12)$$

여기서,  $f_{y1}$ 은 제 1 항복함수,  $f_{y2}$ 는 제 2 항복함수라고 하며,  $\chi_{ij}^*$ 는 비선형 이동경화 파라미터로서 탄성영역의 이동을 나타낸다. 이와 같이, 탄성영역의 변화를 결정하는 함수를 경화함수라고 한다.  $k$ 는 탄성영역의 크기를 제어하는 수치 파라미터이며,  $y_m^*$ 는 스칼라량의 이동경화 파라미터이다.  $\sigma_{m0}$ 는 평균골격응력의 단위값이며,  $R_d$ 는 스칼라량의 변수이다. 이동경화 파라미터인  $y_m^*$ 은 다음과 같이 분해된다.

$$dy_m^* = dy_{m1}^* + dy_{m2}^* \quad (13)$$

$$dy_{m1}^* = B_2^* (A_2^* d\varepsilon_{kk}^p - y_{m1}^* |d\varepsilon_{kk}^p|) \quad (14)$$

$$dy_{m2}^* = H_2^* d\varepsilon_{kk}^p = \left( \frac{1 + e_0}{\lambda - \kappa} \right) d\varepsilon_{kk}^p \quad (15)$$

$f_{y1}$ 은 응력비의 변화에 대한 항복함수로, 과압밀영역에서의 거동이 중심이 되는 액상화현상을 취급하는 경우에는 응력비의 변화가 중요하므로  $f_{y1}$ 이 지배적이 되나, 보다 일반적인 응력상태에서는  $f_{y2}$ 를 고려할 필요가 있다. 식 (11)에서  $\chi_{ij}^*$ 을 부하이력을 나타내는 파라미터라고 하면, 여기에서의 적합조건은 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} df &= \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} + \frac{\partial f}{\partial \chi_{ij}^*} d\chi_{ij}^* = 0 \\ &= \frac{\partial f}{\partial \sigma_m} \frac{\partial \sigma_m}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} + \frac{\partial f}{\partial s_{kl}} \frac{\partial s_{kl}}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} + \frac{\partial f}{\partial \chi_{ij}^*} d\chi_{ij}^* = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= -\frac{\partial f}{\partial \sigma_m} \frac{1}{3} \delta_{ij} d\sigma'_{ij} + \frac{\partial f}{\partial s_{kl}} (\delta_{ik} \delta_{jl} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \delta_{kl}) d\sigma'_{ij} + \frac{\partial f}{\partial \chi_{ij}^*} d\chi_{ij}^* = 0 \\
 &= \frac{\partial f}{\partial \sigma_m} d\sigma'_m + \frac{\partial f}{\partial s_{ij}} ds_{ij} + \frac{\partial f}{\partial \chi_{ij}^*} d\chi_{ij}^* = 0
 \end{aligned} \tag{16}$$

여기서,

$$\frac{\partial \sigma'_m}{\partial \sigma'_{ij}} = \frac{\partial (\frac{1}{3} \sigma'_{kk})}{\partial \sigma'_{ij}} = \frac{1}{3} \delta_{ij} \tag{17}$$

$$\frac{\partial \sigma'_{kl}}{\partial \sigma'_{ij}} = \delta_{ik} \delta_{jl} \tag{18}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial s_{kl}}{\partial \sigma'_{ij}} &= \frac{\partial}{\partial \sigma'_{ij}} (\sigma'_{kl} - \sigma'_m \delta_{kl}) \\
 &= \frac{\partial \sigma'_{kl}}{\partial \sigma'_{ij}} - \frac{\partial \sigma'_m}{\partial \sigma'_{ij}} \delta_{kl} = \delta_{ik} \delta_{jl} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \delta_{kl}
 \end{aligned} \tag{19}$$

$$\frac{\partial f}{\partial s_{kl}} (\delta_{ik} \delta_{jl} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \delta_{kl}) d\sigma'_{ij} = \frac{\partial f}{\partial s_{kl}} (d\sigma'_{kl} - d\sigma'_m \delta_{kl}) = \frac{\partial f}{\partial s_{ij}} ds_{ij} \tag{20}$$

이동경화 파라미터의 발전식은 다음과 같이 정의된다.

$$d\chi_{ij}^* = B^* (A^* de_{ij}^p - \chi_{ij}^* d\gamma^{p*}) \tag{21}$$

$$d\gamma^{p*} = (de_{kl}^p de_{kl}^p)^{1/2} \tag{22}$$

여기서,  $A^*$ ,  $B^*$ 는 재료 파라미터,  $de_{ij}^p$ 는 소성편차변형률증분 텐서,  $d\gamma^{p*}$ 는 소성편차변형률증분 텐서의 제 2 불변량을 나타낸다. 재료 파라미터  $A^*$  및  $B^*$ 는 각각 식 (23) 및 식 (24)와 같이 파괴응력비  $M_f^*$  및  $\sigma_m'$ 로 정규화된 초기 소성전단강성  $G^P$ 와 등가임이 알려져 있다.

$$A^* = M_f^* \tag{23}$$

$$B^* = \frac{G^P}{M_f^*} \tag{24}$$

식 (21)에 식 (22)를 대입하면 다음의 식이 얻어진다.

$$d\chi_{ij}^* = B^* \left\{ A^* de_{ij}^p - \chi_{ij}^* (de_{kl}^p de_{kl}^p)^{1/2} \right\} \tag{25}$$

비관련유동법칙(Non-associate flow rule)에 의하여,

$$d\varepsilon_{ij}^p = H_{ijkl} \frac{\partial g}{\partial s_{ij}} \tag{26}$$

$$de_{ij}^p = 2b \frac{\partial g}{\partial s_{ij}} \tag{27}$$

$$d\varepsilon_{kk}^p = (3a + 2b) \frac{\partial g}{\partial \sigma_m} \tag{28}$$

$$H_{ijkl} = a \delta_{ij} \delta_{kl} + b (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \tag{29}$$

$$g = \left\{ (\eta_{ij}^* - \chi_{ij}^*) (\eta_{ij}^* - \chi_{ij}^*) \right\}^{1/2} + \bar{M}^* \ln \left( \frac{\sigma_m'}{\sigma_{ma}'} \right) = 0 \tag{30}$$

여기서,  $H_{ijkl}$ 은 4계 등방텐서,  $a$ 와  $b$ 는 응력과 변형율의 상태에 의존하는 스칼라 함수이다.  $g$ 는 소성퍼텐셜 함수이며,  $\bar{M}^*$ 은 다일레이턴시 함수,  $\sigma_{ma}'$ 는 수치 파라미터이다. 따라서,

$$d\chi_{ij}^* = B^* \left\{ A^* 2b \frac{\partial g}{\partial s_{ij}} - \chi_{ij}^* \left( \frac{\partial g}{\partial s_{pq}} \frac{\partial g}{\partial s_{pq}} \right)^{1/2} \right\} \tag{31}$$

식 (31)을 식 (16)에 대입하면 다음의 식이 얻어진다.

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_m} d\sigma'_m + \frac{\partial f}{\partial s_{ij}} ds_{ij} + 2b \frac{\partial f}{\partial \chi_{ij}^*} B^* \left\{ A^* \frac{\partial g}{\partial s_{ij}} - \chi_{ij}^* \left( \frac{\partial g}{\partial s_{pq}} \frac{\partial g}{\partial s_{pq}} \right)^{1/2} \right\} \tag{32}$$

식 (32)는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$2b = \frac{\frac{\partial f}{\partial \sigma_m} d\sigma'_m + \frac{\partial f}{\partial s_{kl}} ds_{kl}}{-B^* \frac{\partial f}{\partial \chi_{ij}^*} \left\{ A^* \frac{\partial g}{\partial s_{ij}} - \chi_{ij}^* \left( \frac{\partial g}{\partial s_{pq}} \frac{\partial g}{\partial s_{pq}} \right)^{1/2} \right\}} \tag{33}$$

식 (33)의 분모를 계산하면,

$$\begin{aligned}
 &-B^* \frac{\partial f}{\partial \chi_{ij}^*} \left\{ A^* \frac{\partial g}{\partial s_{ij}} - \chi_{ij}^* \left( \frac{\partial g}{\partial s_{pq}} \frac{\partial g}{\partial s_{pq}} \right)^{1/2} \right\} \\
 &= -B^* \left( -\frac{\eta_{ij}^* - \chi_{ij}^*}{\bar{\eta}_z^*} \right) \left\{ A^* \left( \frac{1}{\sigma_m'} \frac{\eta_{ij}^* - \chi_{ij}^*}{\bar{\eta}_z^*} \right) - \chi_{ij}^* \left( \frac{1}{|\sigma_m'|} \frac{(\eta_{pq}^* - \chi_{pq}^*)(\eta_{pq}^* - \chi_{pq}^*)}{\bar{\eta}_z^*} \right)^{1/2} \right\} \\
 &= A^* B^* \frac{1}{\sigma_m'} \frac{\eta_{ij}^* - \chi_{ij}^*}{\bar{\eta}_z^*} \frac{\eta_{ij}^* - \chi_{ij}^*}{\bar{\eta}_z^*} - \frac{B^*}{|\sigma_m'|} \chi_{ij}^* \sqrt{(\eta_{pq}^* - \chi_{pq}^*)(\eta_{pq}^* - \chi_{pq}^*)} \frac{\eta_{ij}^* - \chi_{ij}^*}{\bar{\eta}_z^*} \\
 &= A^* B^* \frac{1}{\sigma_m'} - \frac{B^*}{|\sigma_m'|} \chi_{ij}^* \frac{\eta_{ij}^* - \chi_{ij}^*}{\bar{\eta}_z^*}
 \end{aligned} \tag{34}$$

항복함수  $f = f_{y1} + f_{y2}$  로서 각 편미분항을 계산하  
면,

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial f}{\partial \chi_{ij}^*} &= \frac{\partial}{\partial \chi_{ij}^*} \sqrt{(\eta_{mn}^* - \chi_{mn}^*)(\eta_{mn}^* - \chi_{mn}^*)} \\
 &= \frac{1}{2\sqrt{(\eta_{mn}^* - \chi_{mn}^*)(\eta_{mn}^* - \chi_{mn}^*)}} \frac{\partial}{\partial \chi_{ij}^*} (\eta_{kl}^* - \chi_{kl}^*)(\eta_{kl}^* - \chi_{kl}^*) \\
 &= \frac{1}{2\bar{\eta}_\chi^*} \left\{ -2 \cdot \frac{\partial \chi_{kl}^*}{\partial \chi_{ij}^*} (\eta_{kl}^* - \chi_{kl}^*) \right\} \\
 &= -\frac{\eta_{kl}^* - \chi_{kl}^*}{\bar{\eta}_\chi^*} \frac{\partial \chi_{kl}^*}{\partial \chi_{ij}^*} = -\frac{\eta_{kl}^* - \chi_{kl}^*}{\bar{\eta}_\chi^*} \delta_{ik} \delta_{jl} \\
 &= -\frac{\eta_{ij}^* - \chi_{ij}^*}{\bar{\eta}_\chi^*} \quad (35)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial f}{\partial s_{ij}} &= \frac{\partial}{\partial s_{ij}} \sqrt{(\eta_{mn}^* - \chi_{mn}^*)(\eta_{mn}^* - \chi_{mn}^*)} \\
 &= \frac{1}{2\sqrt{(\eta_{mn}^* - \chi_{mn}^*)(\eta_{mn}^* - \chi_{mn}^*)}} \frac{\partial}{\partial s_{ij}} (\eta_{kl}^* - \chi_{kl}^*)(\eta_{kl}^* - \chi_{kl}^*) \\
 &= \frac{1}{2\bar{\eta}_\chi^*} \left\{ 2 \cdot \frac{\partial \eta_{kl}^*}{\partial s_{ij}} (\eta_{kl}^* - \chi_{kl}^*) \right\} \\
 &= \frac{\eta_{kl}^* - \chi_{kl}^*}{\bar{\eta}_\chi^*} \frac{\partial \eta_{kl}^*}{\partial s_{ij}} = \frac{\eta_{kl}^* - \chi_{kl}^*}{\bar{\eta}_\chi^*} \frac{1}{\sigma_m^*} \frac{\partial s_{kl}}{\partial s_{ij}} = \frac{\eta_{kl}^* - \chi_{kl}^*}{\bar{\eta}_\chi^*} \frac{1}{\sigma_m^*} \delta_{ik} \delta_{jl} \\
 &= \frac{1}{\sigma_m^*} \frac{\eta_{ij}^* - \chi_{ij}^*}{\bar{\eta}_\chi^*} \quad (36)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial f}{\partial \sigma_m'} &= \frac{\partial}{\partial \sigma_m'} \left[ \sqrt{(\eta_{ij}^* - \chi_{ij}^*)(\eta_{ij}^* - \chi_{ij}^*)} + M_m^* \ln \left( \frac{\sigma_m'}{\sigma_{m0}'} \right) - y_m^* \right] \\
 &= \frac{1}{2\sqrt{(\eta_{ij}^* - \chi_{ij}^*)(\eta_{ij}^* - \chi_{ij}^*)}} \frac{\partial}{\partial \sigma_m'} (\eta_{kl}^* - \chi_{kl}^*)(\eta_{kl}^* - \chi_{kl}^*) + M_m^* \frac{1}{\sigma_m'} \frac{\ln \left( \frac{\sigma_m'}{\sigma_{m0}'} \right) - y_m^*}{\ln \left( \frac{\sigma_m'}{\sigma_{m0}'} \right) - y_m^*} \\
 &= \frac{1}{2\bar{\eta}_\chi^*} \left\{ \frac{\partial \eta_{kl}^*}{\partial \sigma_m'} (\eta_{kl}^* - \chi_{kl}^*) + (\eta_{kl}^* - \chi_{kl}^*) \left( \frac{\partial \eta_{kl}^*}{\partial \sigma_m'} \right) \right\} + D \frac{1}{\sigma_m'} \\
 &= \frac{\eta_{kl}^* - \chi_{kl}^*}{\bar{\eta}_\chi^*} \frac{\partial \eta_{kl}^*}{\partial \sigma_m'} + D \frac{1}{\sigma_m'} = \frac{\eta_{kl}^* - \chi_{kl}^*}{\bar{\eta}_\chi^*} \frac{\partial}{\partial \sigma_m'} \frac{s_{kl}}{\sigma_m'} + D \frac{1}{\sigma_m'} \\
 &= \frac{\eta_{kl}^* - \chi_{kl}^*}{\bar{\eta}_\chi^*} \left( -\frac{s_{kl}}{\sigma_m'^2} \right) + D \frac{1}{\sigma_m'} = -\frac{1}{\sigma_m'} \frac{\eta_{kl}^* - \chi_{kl}^*}{\bar{\eta}_\chi^*} \frac{s_{kl}}{a_m} + D \frac{1}{\sigma_m'} \\
 &= -\frac{1}{\sigma_m'} \frac{\eta_{kl}^* (\eta_{kl}^* - \chi_{kl}^*)}{\bar{\eta}_\chi^*} + D \frac{1}{\sigma_m'}, \quad D = M_m^* \frac{\ln \left( \frac{\sigma_m'}{\sigma_{m0}'} \right) - y_m^*}{\ln \left( \frac{\sigma_m'}{\sigma_{m0}'} \right) - y_m^*} \quad (37)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial g}{\partial s_{ij}} &= \frac{\partial}{\partial s_{ij}} \sqrt{(\eta_{mn}^* - \chi_{mn}^*)(\eta_{mn}^* - \chi_{mn}^*)} \\
 &= \frac{1}{2\sqrt{(\eta_{mn}^* - \chi_{mn}^*)(\eta_{mn}^* - \chi_{mn}^*)}} \frac{\partial}{\partial s_{ij}} (\eta_{kl}^* - \chi_{kl}^*)(\eta_{kl}^* - \chi_{kl}^*) \\
 &= \frac{1}{2\bar{\eta}_\chi^*} \left\{ 2 \cdot \frac{\partial \eta_{kl}^*}{\partial s_{ij}} (\eta_{kl}^* - \chi_{kl}^*) \right\} \\
 &= \frac{\eta_{kl}^* - \chi_{kl}^*}{\bar{\eta}_\chi^*} \frac{\partial \eta_{kl}^*}{\partial s_{ij}} = \frac{\eta_{kl}^* - \chi_{kl}^*}{\bar{\eta}_\chi^*} \frac{1}{\sigma_m^*} \frac{\partial s_{kl}}{\partial s_{ij}} = \frac{\eta_{kl}^* - \chi_{kl}^*}{\bar{\eta}_\chi^*} \frac{1}{\sigma_m^*} \delta_{ik} \delta_{jl} \\
 &= \frac{1}{\sigma_m^*} \frac{\eta_{ij}^* - \chi_{ij}^*}{\bar{\eta}_\chi^*} \quad (38)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial g}{\partial \sigma_m'} &= \frac{\partial}{\partial \sigma_m'} \sqrt{(\eta_{ij}^* - \chi_{ij}^*)(\eta_{ij}^* - \chi_{ij}^*)} + \tilde{M}^* \frac{1}{\sigma_m'} \\
 &= \frac{1}{2\sqrt{(\eta_{ij}^* - \chi_{ij}^*)(\eta_{ij}^* - \chi_{ij}^*)}} \frac{\partial}{\partial \sigma_m'} (\eta_{kl}^* - \chi_{kl}^*)(\eta_{kl}^* - \chi_{kl}^*) + \tilde{M}^* \frac{1}{\sigma_m'} \\
 &= \frac{1}{2\bar{\eta}_\chi^*} \left\{ 2 \cdot \frac{\partial \eta_{kl}^*}{\partial \sigma_m'} (\eta_{kl}^* - \chi_{kl}^*) \right\} + \tilde{M}^* \frac{1}{\sigma_m'} \\
 &= \frac{\eta_{kl}^* - \chi_{kl}^*}{\bar{\eta}_\chi^*} \frac{\partial \eta_{kl}^*}{\partial \sigma_m'} + \tilde{M}^* \frac{1}{\sigma_m'} = \frac{\eta_{kl}^* - \chi_{kl}^*}{\bar{\eta}_\chi^*} \frac{\partial}{\partial \sigma_m'} \frac{s_{kl}}{\sigma_m'} + \tilde{M}^* \frac{1}{\sigma_m'} \\
 &= \frac{\eta_{kl}^* - \chi_{kl}^*}{\bar{\eta}_\chi^*} \left( -\frac{s_{kl}}{\sigma_m'^2} \right) + \tilde{M}^* \frac{1}{\sigma_m'} = -\frac{1}{\sigma_m'} \frac{\eta_{kl}^* - \chi_{kl}^*}{\bar{\eta}_\chi^*} \frac{s_{kl}}{\sigma_m'} + \tilde{M}^* \frac{1}{\sigma_m'} \\
 &= \frac{1}{\sigma_m'} \left\{ \tilde{M}^* - \frac{\eta_{kl}^* (\eta_{kl}^* - \chi_{kl}^*)}{\bar{\eta}_\chi^*} \right\} \quad (39)
 \end{aligned}$$

여기서,

$$\bar{\eta}_\chi^* = \{(\eta_{ij}^* - \chi_{ij}^*)(\eta_{ij}^* - \chi_{ij}^*)\}^{1/2} \quad (40)$$

$$\eta_{ij}^* = \frac{s_{ij}}{\sigma_m} \quad (41)$$

식 (33)에 식 (34), 식 (36) 및 식 (37)을 대입하면 다음  
의 식을 얻는다.

$$2b = \frac{\frac{1}{\sigma_m} \left\{ D - \frac{\eta_{kl}^* (\eta_{kl}^* - \chi_{kl}^*)}{\bar{\eta}_\chi^*} \right\} d \sigma_m' + \left\{ \frac{1}{\sigma_m} \frac{\eta_{mn}^* - \chi_{mn}^*}{\bar{\eta}_\chi^*} \right\} ds_{mn}}{\frac{1}{\sigma_m} A^* B^* - \frac{1}{|\sigma_m|} B^* \chi_{ij}^* \frac{\eta_{ij}^* - \chi_{ij}^*}{\bar{\eta}_\chi^*}} \quad (42)$$

삼축압축 조건 ( $\sigma_{11}' > \sigma_{22}' = \sigma_{33}'$ )에서,

$$s_{ij} = \sigma'_{ij} - \sigma'_m \delta_{ij} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}q & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3}q & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3}q \end{pmatrix} \quad (43)$$

여기서,

$$q = \sigma'_{11} - \sigma'_{33} \quad (44)$$

$$s_{11} = \sigma'_{11} - \frac{1}{3}(\sigma'_{11} + 2\sigma'_{33}) = \frac{2}{3}(\sigma'_{11} - \sigma'_{33}) = \frac{2}{3}q \quad (45)$$

$$s_{33} = \sigma'_{33} - \frac{1}{3}(\sigma'_{11} + 2\sigma'_{33}) = -\frac{1}{3}(\sigma'_{11} - \sigma'_{33}) = -\frac{1}{3}q \quad (46)$$

$$s_{22} = s_{33} \quad (47)$$

$$\eta_{ij}^* = \frac{s_{ij}^*}{\sigma_m^*} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \frac{q}{\sigma_m^*} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} \frac{q}{\sigma_m^*} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} \frac{q}{\sigma_m^*} \end{pmatrix} \longrightarrow \eta_{33}^* = -\frac{1}{2}\eta_{11}^* \quad (48)$$

$$\begin{aligned} \bar{\eta}_x^* &= \{(\eta_{ij}^* - \chi_{ij}^*)(\eta_{ij}^* - \chi_{ij}^*)\}^{1/2} \\ &= \{(\eta_{11}^* - \chi_{11}^*)(\eta_{11}^* - \chi_{11}^*) + 2(\eta_{33}^* - \chi_{33}^*)(\eta_{33}^* - \chi_{33}^*)\}^{1/2} \\ &= \left\{(\eta_{11}^* - \chi_{11}^*)(\eta_{11}^* - \chi_{11}^*) + 2\left[-\frac{1}{2}\eta_{11}^* + \frac{1}{2}\chi_{11}^*\right]\left[-\frac{1}{2}\eta_{11}^* + \frac{1}{2}\chi_{11}^*\right]\right\}^{1/2} \\ &= \sqrt{\frac{3}{2}} |\eta_{11}^* - \chi_{11}^*| \end{aligned} \quad (49)$$

2b의 각 부분을 다음과 같이 A, B 및 C로 치환한다.

$$\frac{\eta_{kl}^*(\eta_{kl}^* - \chi_{kl}^*)}{\bar{\eta}_x^*} = \frac{\eta_{11}^*(\eta_{11}^* - \chi_{11}^*) + 2\eta_{33}^*(\eta_{33}^* - \chi_{33}^*)}{\bar{\eta}_x^*} = A \quad (50)$$

$$\begin{aligned} \frac{\eta_{mn}^* - \chi_{mn}^*}{\bar{\eta}_x^*} ds_{mn} &= \frac{(\eta_{11}^* - \chi_{11}^*)ds_{11} + 2(\eta_{33}^* - \chi_{33}^*)ds_{33}}{\bar{\eta}_x^*} \\ &= \frac{(\eta_{11}^* - \chi_{11}^*)^{\frac{2}{3}}dq - (\eta_{33}^* - \chi_{33}^*)^{\frac{2}{3}}dq}{\bar{\eta}_x^*} \\ &= \frac{2}{3} \frac{(\eta_{11}^* - \chi_{11}^*) - (\eta_{33}^* - \chi_{33}^*)}{\bar{\eta}_x^*} dq = B \cdot dq \end{aligned} \quad (51)$$

$$\frac{\chi_{ij}^*(\eta_{ij}^* - \chi_{ij}^*)}{\bar{\eta}_x^*} = \frac{\chi_{11}^*(\eta_{11}^* - \chi_{11}^*) + 2\chi_{33}^*(\eta_{33}^* - \chi_{33}^*)}{\bar{\eta}_x^*} = C \quad (52)$$

따라서, 2b는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} 2b &= \frac{\frac{1}{\sigma_m^*} \left\{ D - \frac{\eta_{ij}^*(\eta_{ij}^* - \chi_{ij}^*)}{\bar{\eta}_x^*} \right\} d\sigma_m^* + \left\{ \frac{\eta_{mn}^* - \chi_{mn}^*}{\sigma_m^* \bar{\eta}_x^*} \right\} ds_{mn}}{\frac{1}{\sigma_m^*} A^* B^* - \frac{1}{|\sigma_m^*|} B^* \chi_{ij}^* \frac{\eta_{ij}^* - \chi_{ij}^*}{\bar{\eta}_x^*}} \\ &= \frac{\frac{1}{\sigma_m^*} (D - A) d\sigma_m^* + \frac{1}{\sigma_m^*} (B \cdot dq)}{\frac{1}{\sigma_m^*} A^* B^* - \frac{1}{|\sigma_m^*|} (C \cdot B^*)} \end{aligned} \quad (53)$$

여기서,

$$\sigma_m^* = \frac{1}{3} \sigma_{kk}^* = \frac{1}{3} (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) = p' \longrightarrow d\sigma_m^* = dp' \quad (54)$$

전체변형률증분 텐서  $d\epsilon_{ij}$ 는 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} d\epsilon_{ij} &= d\epsilon_{kk}^e \frac{1}{3} \delta_{ij} + d\epsilon_{ij}^e + d\epsilon_{kk}^p \frac{1}{3} \delta_{ij} + d\epsilon_{ij}^p \\ &= \frac{\kappa}{1+e_0} \frac{d\sigma_m^*}{\sigma_m^*} \frac{1}{3} \delta_{ij} + \frac{1}{2\mu} ds_{ij} + 2b \frac{\partial g}{\partial \sigma_m^*} \frac{1}{3} \delta_{ij} + 2b \frac{\partial g}{\partial s_{ij}} \\ &= \frac{\kappa}{1+e_0} \frac{d\sigma_m^*}{\sigma_m^*} \frac{1}{3} \delta_{ij} + \frac{1}{2\mu} ds_{ij} + 2b \frac{1}{\sigma_m^*} \left\{ M^* - \frac{\eta_{ij}^*(\eta_{ij}^* - \chi_{ij}^*)}{\bar{\eta}_x^*} \right\} \frac{1}{3} \delta_{ij} + \frac{1}{\sigma_m^*} 2b \frac{\eta_{ij}^* - \chi_{ij}^*}{\bar{\eta}_x^*} \end{aligned} \quad (55)$$

여기서,

$$K = \frac{1+e_0}{\kappa} \sigma_m^* = \lambda + \frac{2}{3} \mu \quad (56)$$

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \longrightarrow E = 3(1-2\nu)K \quad (57)$$

$$d\epsilon_{kk}^e = \frac{1}{K} d\sigma_m^* = \frac{\kappa}{1+e_0} \frac{d\sigma_m^*}{\sigma_m^*} \quad (58)$$

식 (55)는 축방향을 “11”로 정의하여 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} d\epsilon_{11} &= \frac{1}{3} \frac{\kappa}{1+e_0} \frac{d\sigma_m^*}{\sigma_m^*} + \frac{1}{2\mu} ds_{11} + \frac{1}{3} 2b \frac{1}{\sigma_m^*} \left\{ M^* - \frac{\eta_{ij}^*(\eta_{ij}^* - \chi_{ij}^*)}{\bar{\eta}_x^*} \right\} + \frac{1}{\sigma_m^*} 2b \frac{\eta_{11}^* - \chi_{11}^*}{\bar{\eta}_x^*} \\ &= \frac{1}{3} \frac{\kappa}{1+e_0} \frac{dp'}{\sigma_m^*} + \frac{1}{2\mu} \frac{2}{3} dq + 2b \frac{1}{\sigma_m^*} \left[ \frac{1}{3} \left\{ M^* - \frac{\eta_{ij}^*(\eta_{ij}^* - \chi_{ij}^*)}{\bar{\eta}_x^*} \right\} + \frac{\eta_{11}^* - \chi_{11}^*}{\bar{\eta}_x^*} \right] \end{aligned} \quad (59)$$

여기서,

$$ds_{11} = \frac{2}{3} dq \quad (60)$$

식 (59)에 식 (50) 및 식 (53)을 대입하면 다음과 같은 식을 얻는다.

$$d\varepsilon_{11} = \frac{1}{3} \frac{\kappa}{(1+e_0)} \frac{dp'}{\sigma_m'} + \frac{1}{3\mu} dq + \frac{1}{\sigma_m'} \left\{ \frac{\frac{1}{\sigma_m'}(D-A)dp' + \frac{1}{\sigma_m'}(B \cdot dq)}{\frac{1}{\sigma_m'}A^*B^* - \frac{1}{|\sigma_m|}(C \cdot B^*)} \right\} \left\{ \frac{1}{3}(M^* - A) + \frac{\eta_{11}^* - \chi_{11}^*}{\bar{\eta}_z^*} \right\} \quad (61)$$

배수 삼축압축시험의 경우,

$$dp' = \frac{1}{3} dq \quad (62)$$

따라서,

$$d\varepsilon_{11} = \frac{1}{3} \frac{\kappa}{(1+e_0)} \frac{1}{\sigma_m'} \cdot \frac{1}{3} dq + \frac{1}{3\mu} dq + \frac{1}{\sigma_m'} \left\{ \frac{\frac{1}{\sigma_m'}(D-A) \cdot \frac{1}{3} dq + \frac{1}{\sigma_m'}(B \cdot dq)}{\frac{1}{\sigma_m'}A^*B^* - \frac{1}{|\sigma_m|}(C \cdot B^*)} \right\} \left\{ \frac{1}{3}(M^* - A) + \frac{\eta_{11}^* - \chi_{11}^*}{\bar{\eta}_z^*} \right\} = \left[ \frac{1}{9} \frac{\kappa}{(1+e_0)} \frac{1}{\sigma_m'} + \frac{1}{3\mu} + \frac{1}{\sigma_m'} \left\{ \frac{\frac{1}{\sigma_m'}(D-A) + \frac{1}{\sigma_m}B}{\frac{1}{\sigma_m}A^*B^* - \frac{1}{|\sigma_m|}(C \cdot B^*)} \right\} \right] \left\{ \frac{1}{3}(M^* - A) + \frac{\eta_{11}^* - \chi_{11}^*}{\bar{\eta}_z^*} \right\} dq \quad (63)$$

$$dq = \frac{d\varepsilon_{11}}{\left( \frac{1}{9} \frac{\kappa}{(1+e_0)} \frac{1}{\sigma_m'} + \frac{1}{3\mu} + \left[ \frac{1}{\sigma_m'} \left\{ \frac{\frac{1}{\sigma_m'}(D-A) + \frac{1}{\sigma_m}B}{\frac{1}{\sigma_m}A^*B^* - \frac{1}{|\sigma_m|}(C \cdot B^*)} \right\} \right] \left\{ \frac{1}{3}(M^* - A) + \frac{\eta_{11}^* - \chi_{11}^*}{\bar{\eta}_z^*} \right\} \right)} \quad (64)$$

소성체적변형률증분은 다음의 식으로 구해진다.

$$d\varepsilon_{kk}^p = 2b \frac{\partial g}{\partial \sigma_m'} = 2b \frac{1}{\sigma_m'} \left\{ M^* - \frac{\eta_{kk}^* (\eta_{kk}^* - \chi_{kk}^*)}{\bar{\eta}_z^*} \right\} = 2b \frac{1}{\sigma_m'} (M^* - A) \quad (65)$$

이동경화 파라미터의 발전식은 다음의 식과 같이 쓸 수 있다.

$$d\chi_{ij}^* = B^* \left( A^* de_{ij}^p - \chi_{ij}^* d\gamma^{p*} \right) = B^* \left( A^* 2b \frac{1}{\sigma_m'} \frac{\eta_{ij}^* - \chi_{ij}^*}{\bar{\eta}_z^*} - \chi_{ij}^* \left| \frac{2b}{\sigma_m'} \right| \right) \quad (66)$$

식 (66)은 축방향과 횡방향에 대하여 각각 식 (67) 및 식 (68)과 같이 쓸 수 있다. 여기서, 축방향 및 횡방향을 각각 “11”과 “33”으로 정의한다. 즉,

$$d\chi_{11}^* = B^* \left( A^* 2b \frac{1}{\sigma_m'} \frac{\eta_{11}^* - \chi_{11}^*}{\bar{\eta}_z^*} - \chi_{11}^* \left| \frac{2b}{\sigma_m'} \right| \right) \quad (67)$$

$$d\chi_{33}^* = B^* \left( A^* 2b \frac{1}{\sigma_m'} \frac{\eta_{33}^* - \chi_{33}^*}{\bar{\eta}_z^*} - \chi_{33}^* \left| \frac{2b}{\sigma_m'} \right| \right) \quad (68)$$

여기서,

$$d\gamma^{p*} = \left( de_{kl}^p de_{kl}^p \right)^{1/2} = \left| \frac{2b}{\sigma_m'} \right| \quad (69)$$

$$de_{kl}^p = 2b \frac{\partial g}{\partial s_{kl}} = 2b \frac{1}{\sigma_m'} \frac{\eta_{kl}^* - \chi_{kl}^*}{\bar{\eta}_z^*} \quad (70)$$

만약 평균골격응력이 변화하지 않는다면, 제 2 항복 함수  $f_{y2}$ 는 해석에 반영되지 않는다. 이 경우,  $f = f_{y1}$  이고  $D = 0$ 이므로,  $2b$ 와  $dq$ 는 다음과 같이 표현된다.

$$2b = \frac{\left\{ -\frac{1}{\sigma_m'} \frac{\eta_{kk}^* (\eta_{kk}^* - \chi_{kk}^*)}{\bar{\eta}_z^*} \right\} d\sigma_m' + \left\{ \frac{1}{\sigma_m'} \frac{\eta_{mn}^* - \chi_{mn}^*}{\bar{\eta}_z^*} \right\} ds_{mn}}{\frac{1}{\sigma_m'} A^* B^* - \frac{1}{|\sigma_m|} B^* \chi_{ij}^* \frac{\eta_{ij}^* - \chi_{ij}^*}{\bar{\eta}_z^*}} = \frac{-\frac{1}{\sigma_m'} (A \cdot dp') + \frac{1}{\sigma_m'} (B \cdot dq)}{\frac{1}{\sigma_m'} A^* B^* - \frac{1}{|\sigma_m|} (C \cdot B^*)} \quad (71)$$

$$dq = \frac{d\varepsilon_{11}}{\left( \frac{1}{9} \frac{\kappa}{(1+e_0)} \frac{1}{\sigma_m'} + \frac{1}{3\mu} + \left[ \frac{1}{\sigma_m'} \left\{ \frac{\frac{1}{\sigma_m'}(D-A) + \frac{1}{\sigma_m}B}{\frac{1}{\sigma_m}A^*B^* - \frac{1}{|\sigma_m|}(C \cdot B^*)} \right\} \right] \left\{ \frac{1}{3}(M^* - A) + \frac{\eta_{11}^* - \chi_{11}^*}{\bar{\eta}_z^*} \right\} \right)} \quad (72)$$

상기와 같이 반복삼축압축시험의 요소시물레이션을 위한 응력-변형률 관계가 유도된다. 이를 응력반전을 고려한 반복재하와 함께 코딩(Coding)할 경우, 반복삼축압축시험을 수치해석적으로 모사할 수 있을 것이다.

## 4. 결론

본 연구는 불포화토에 대하여 확장된 Oka의 반복탄소성구성식에 근거한 요소시물레이션 기법 정립을 위한 것으로, 불포화토에서의 부(-)의 압력인 석션(Suction)의 효과를 지진 등의 동적 하중조건에서 고려하기 위하여 불포화토에 대해 확장된 반복탄소성구성식에 근거한 응력-변형률 관계를 제 1 항복함수 및 제 2 항복함수를 고려하여 유도하였다. 본 연구로부터 얻은 결론은 다음과 같다.



- 1) 불포화토의 역학적 특성에 영향을 미치는 석선을 고려하여 반복삼축압축시험의 요소시물레이션을 위한 응력-변형을 관계의 유도가 가능함을 알 수 있었다. 본 관계를 응력반전을 고려한 반복재하와 함께 코딩(Coding)할 경우, 반복삼축압축시험의 수치해석적 모사가 가능할 것으로 판단된다.
- 2) 본 관계를 2차원 및 3차원 수치해석에서 액상화 이후의 압밀거동 예측 등에 적용하는 경우에는 평균골격응력 (Mean skeleton stress)의 변화를 반영하는 제 2 항복함수의 도입이 필요하나, 요소시물레이션에서는 제 1 항복함수만으로도 수치해석을 위한 각 물성치 및 석선 파라미터 결정이 가능할 것으로 사료된다.
- 3) 본 연구결과는 각 물성치 및 석선 파라미터의 합리적 결정과 함께 동적 하중이 작용하는 불포화토 거동 예측의 정확도 제고에 기여할 것으로 전망된다.

## Reference

- [1] F. Oka, A. Yashima, A. Tateishi, Y. Taguchi, S. Yamashita, "A cyclic elastoplastic constitutive model for sand considering a plastic-strain dependence of the shear modulus", *Geotechnique*, Vol. 49, No. 5, pp. 661-680, 1999.  
DOI: <http://dx.doi.org/10.1680/geot.1999.49.5.661>
- [2] F. Oka, "A cyclic elasto-viscoplastic constitutive model for clay based on the non-linear hardening rule", *Proc. 4th International Symposium on Numerical Models in Geomechanics*, Swansea, Pande, G. N. and Pietruszczak, S. eds., 1, Balkema, pp. 105-114, 1992.
- [3] Y. Taguchi, A. Tateishi, F. Oka and A. Yashima, "A Cyclic elasto-plastic model based on the generalized flow rule and its application", *Proc. 5th Int. Symposium on Numerical Models in Geomechanics*, Davos, Switzerland, Pande, G. N. and Pietruszczak, S. eds., Balkema, pp. 57-62, 1995.
- [4] A. Tateishi, Y. Taguchi, F. Oka and A. Yashima, "An elasto-plastic model for sand and its application under various stress conditions", *Proc. of 1st Int. Conference on Earthquake Geotechnical Engineering*, Tokyo, Ishihara, K. ed., Balkema, Vol. 1, pp. 399-404, 1995.
- [5] F. Oka and H. Washizu, "Constitutive equations for sand and overconsolidated clays", *Proc. Int. Conference on Recent Advances in Earthquake Engineering and Soil Dynamics*, St. Louis, Prakash, S. ed., 1, pp. 71-74, 1981.
- [6] P. J. Armstrong and C. O. Frederick, "A mathematical representation of the multiaxial Bauschinger effect", *C. E. G. B. Report RD/B/N*, p. 731, 1966.
- [7] J. L. Chaboche and G. Rousselier, "On the plastic and viscoplastic constitutive equations Part I and Part II", *Journal of Pressure Vessel Technology, Transactions of the ASME*, Vol. 105, pp. 153-164, 1983.
- [8] F. Oka, "Constitutive equations for granular materials in cyclic loadings", *Proc. IUTAM Conference on Deformation and Failure of Granular Materials*, Delft, Vermeer, P. A. and Luger, H. J. eds., Balkema, pp. 297-306, 1982.
- [9] P. M. Naghdi and J. A. Trapp, "Restrictions on constitutive equations of finitely deformed elasto-plastic materials", *Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, Vol. 28, Pt. 1, pp. 25-46, 1975.  
DOI: <http://dx.doi.org/10.1093/qjmam/28.1.25>
- [10] F. Oka, T. Kodaka, S. Kimoto, Y. S. Kim and N. Yamasaki, "A multi-phase coupled FE analysis using an elasto-viscoplastic model for unsaturated soil", *Geomechanics II, Geotechnical Special Publication*, ASCE, *Proc. 2nd US-Japan workshop on Geomechanics*, pp. 124-131, 2006.  
DOI: [http://dx.doi.org/10.1061/40870\(216\)10](http://dx.doi.org/10.1061/40870(216)10)
- [11] D. Gallipoli, A. Gens, R. Sharma and J. Baunat, "An elasto-plastic model for unsaturated soil incorporating the effects of suction and degree of saturation on mechanical behavior", *Geotechnique*, Vol. 53, No. 1, pp. 123-135, 2003.  
DOI: <http://dx.doi.org/10.1680/geot.2003.53.1.123>
- [12] C. Jommi, "Remarks on the constitutive modelling of unsaturated soils, Experimental Evidence and Theoretical Approaches in Unsaturated Soils", *Tarantino, A. and Mancuso, C. eds., Balkema*, pp. 139-153, 2000.
- [13] F. Oka, T. Kodaka, S. Kimoto, R. Kato and S. Sunami, "A hydro-mechanical coupled analysis of an unsaturated river embankment due to seepage flow", *Key engineering materials, Trans tech publications*, Vol. 340-341, pp. 1223-1230, 2007.  
DOI: <http://dx.doi.org/10.4028/www.scientific.net/KEM.340-341.1223>
- [14] F. Oka, S. Kimoto, R. Kato, S. Sunami and T. Kodaka, "A soil-water coupled analysis of the deformation of an unsaturated river embankment due to seepage flow and overflow", *Proc. 12th International Conference of International Association for Computer Methods and Advances in Geomechanics (IACMAG)*, Goa, India, 1-6

October 2008, Singh, D. N. ed., pp. 2029-2041, 2008.

- [15] R. Kato, "Development of an unsaturated seepage-deformation coupled simulation method and its application to river embankment", Ph.D. dissertation, Kyoto University, Japan, 2011. (in Japanese)

---

**이 충 원**(Chung-Won Lee)

[정회원]



- 2001년 2월 : 고려대학교 공과대학 토목환경공학과(공학사)
- 2003년 2월 : 고려대학교 대학원 토목환경공학과 지반공학 전공(공학석사)
- 2007년 6월 : 토질 및 기초기술사 (81회)
- 2009년 10월 ~ 2012년 9월 : 일본 문부과학성 국비 연구유학생
- 2012년 9월 : 일본 Kyoto University 대학원 공학연구과 지반방재공학 전공(공학박사)
- 2012년 11월 ~ 2014년 12월 : 강원대학교 석재복합건설신소재연구소 특별연구원
- 2015년 4월 ~ 현재 : 국민안전처 국가민방위재난안전교육원 교수(사무관)

<관심분야>

지반방재공학(지진 및 불포화토 역학), 토질 및 기초설계(연약지반, 항만, 터널, 기초 등)