Journal of Institute of Control, Robotics and Systems (2015) 21(3):233-236
http://dx.doi.org/10.5302/J.ICROS.2015.14.0141 ISSN:1976-5622 eISSN:2233-4335

구조적인 제약이 있는 이산시간 선형시스템의 정적출력 되먹임 안정화 제어기 설계

Structured Static Output Feedback Stabilization of Discrete Time Linear Systems

이 준 화*
(Joonhwa Lee[1,*])
[1]School Electrical and Computer Engineering, University of Seoul

Abstract: In this paper, a nonlinear optimization problem is proposed to obtain a structured static output feedback controller for discrete time linear systems. The proposed optimization problem has LMI (Linear Matrix Inequality) constraints and a non-convex objective function. Using the conditional gradient method, we can obtain suboptimal solutions of the proposed optimization problem. Numerical examples show the effectives of the proposed approach.

Keywords: static output feedback, structured, stabilization, LMI, discrete-time system

I. 서론

정적 출력 되먹임(static output feedback) 제어기 설계문제와, 분산 제어기(decentralized control)와 같이 구조적인 제약이 있는 제어기의 설계문제는, BMI (Bilinear Matrix Inequality)문제로 표현되어, 해석적인 방법으로 해를 구하기 어려우며[2], 수치적인 방법으로 해를 구하는 연구들이 각 문제별로 이루어지고 있다[3,6-9]. 그러나 두 문제가 결합된 문제, 즉 구조적인 제약이 있는 정적 출력 되먹임 제어기 설계에 관한 연구는 많지 않다[4].

정적출력 되먹임 안정화 제어기를 구하는 많은 연구들은 적당한 매개변수를 사용하여 제어이득 행렬 K를 다음과 같이 표현하고,

$$K = NM^{-1} \tag{1}$$

N과 M을 사용한 안정도 조건을 구한 후, 안정도 조건을 만족하는 N과 M을 수치적인 방법으로 구하고 있다 [6-9]. 그러나 제어이득 행렬 K에 구조적인 제약이 있는 경우 식 (1)과 같은 형태로 K를 표현하려면 N에 K의 구조적인 제약을 반영하고, 구역대각행렬(block diagonal matrix) 형태로 제한된 S를 사용해야 한다. 따라서 식 (1)과 같은 형태로 제어이득 행렬을 표현하고 유도된 대부분의 안정도 조건들은, K에 구조적인 제약이 있는 경우에는 제약이 많은 충분조건이 된다.

본 연구에서는 기존의 연구들과는 다른, 새로운 형태의 안정도 조건을 유도한다. 유도된 조건은 제어이득 행렬 K가 구조적인 제약을 갖는 경우에도 필요충분조건이 되며, 유도된 조건을 만족하는 제어이득 행렬 K를 구하기 위한 최적화 문제를 제안한다. 제안된 최적화 문제는 비볼록(non-convex)형태의 목적함수와 선형행렬부등식(linear matrix inequality)의 제약조건을 갖는 비선형 최적화 문제로, conditional gradient method를 사용한 수치적인 알고리즘을 사용하여 해를 구할 수 있다. 기존 연구결과와의 비교 등을 통하여 제안된 제어기 설계 방법의 유효성을 검증한다.

II. 정적출력 되먹임 제어기의 설계

다음과 같이 주어지는 이산시간 선형시스템에 대하여

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) &= Cx(k) \end{aligned} \tag{2}$$

다음 식으로 주어지는 정적 출력 되먹임 안정화 제어기를 구하는 문제를 생각하자.

$$u(k) = Ky(k) \tag{3}$$

식 (2)에서 $x(k) \in R^n$ 는 상태변수, $u(k) \in R^m$ 는 제어입력, $y(k) \in R^p$ 는 출력이다. 출력변수의 수가 상태변수의 수보다 작은 경우, 즉 $p < n$ 을 가정한다. 또한 식 (3)의 제어이득 행렬 K가 구조적인 제약이 있을 수 있음을 가정한다. 예를 들어 다음과 같이

$$K = \begin{bmatrix} k_1 & 0 & k_2 \\ 0 & k_3 & 0 \end{bmatrix} \tag{4}$$

제어이득 행렬의 일부분만 제어이득 값을 지정할 수 있는 구조적인 제약이 있는 제어기를 가정한다. 식 (3)으로 주어지는 제어기를 식 (2)의 시스템에 적용하면 다음과 같은 시스템을 얻는다.

$$x(k+1) = (A + BKC)x(k) \tag{5}$$

* Corresponding Author
Manuscript received December 17, 2014 / revised December 20, 2014 / accepted December 23, 2014
이준화: 서울시립대학교 전자전기컴퓨터공학부(joonhwa@uos.ac.kr)
※ 이 논문은 2013년도 서울시립대학교 연구년교수 연구비에 의하여 연구되었음.

식 (5)로 주어지는 시스템이 안정한 경우, 적당한 양한정 (positive definite) 행렬 $P>0$ 가 존재해서 다음과 같은 행렬 부등식을 만족한다.

$$\begin{bmatrix} P & (A+BKC)^T P \\ P(A+BKC) & P \end{bmatrix} -2I>0 \tag{6}$$

식 (6)으로 주어지는 BMI를 만족하는 $P>0$ 와 K를 구할 수 있으면, 식 (3)으로 주어지는 정적 출력 되먹임제어기는 식 (2)로 주어지는 이산시간 시스템을 안정화 시킨다. 식 (6)은 다음과 같이 변형된다.

$$\begin{bmatrix} P & A^T P \\ PA & P \end{bmatrix} -2I+\begin{bmatrix} 0 \\ PB \end{bmatrix}[KC\ \ 0]+\begin{bmatrix} C^T K^T \\ 0 \end{bmatrix}[0\ B^T P]\ >0 \tag{7}$$

Projection Lemma [1]와 Finsler's Lemma [1]를 식 (7)에 적용하면 충분히 큰 양수 $\sigma_1>0$가 존재해서 다음 식을 만족함을 보일 수 있다.

$$\begin{bmatrix} P & A^T P \\ PA & P \end{bmatrix} -2I+\sigma_1\begin{bmatrix} C^T K^T \\ 0 \end{bmatrix}[KC\ \ 0]>0 \tag{8}$$

또한, 식 (6)을 만족하는 $P>0$ 에 대하여, 다음 식을 만족하는 충분히 큰 양수 $\sigma>\sigma_1$ 가 존재한다.

$$\frac{1}{\sigma}\begin{bmatrix} 0 \\ PB \end{bmatrix}[0\ \ B^T P]\ <\ I \tag{9}$$

식 (9)의 관계로부터 $P>0$ 와 K가 식 (7)을 만족하는 경우 다음 부등식이 성립함을 알 수 있다.

$$\begin{bmatrix} P & A^T P \\ PA & P \end{bmatrix} -I+\sigma\begin{bmatrix} C^T K^T \\ 0 \end{bmatrix}[KC\ \ 0]-\sigma\begin{bmatrix} C^T K^T \\ 0 \end{bmatrix}[KC\ \ 0]$$
$$+\begin{bmatrix} 0 \\ PB \end{bmatrix}[KC\ \ 0]+\begin{bmatrix} C^T K^T \\ 0 \end{bmatrix}[0\ \ B^T P]-\frac{1}{\sigma}\begin{bmatrix} 0 \\ PB \end{bmatrix}[0\ \ B^T P]$$
$$>0 \tag{10}$$

식 (10)은 다음과 같이 정리된다.

$$\begin{bmatrix} P & A^T P \\ PA & P \end{bmatrix} -I+\sigma\begin{bmatrix} C^T K^T \\ 0 \end{bmatrix}[KC\ \ 0]$$
$$-\sigma\left(\begin{bmatrix} C^T K^T \\ 0 \end{bmatrix}-\frac{1}{\sigma}\begin{bmatrix} 0 \\ PB \end{bmatrix}\right)\left(\begin{bmatrix} C^T K^T \\ 0 \end{bmatrix}-\frac{1}{\sigma}\begin{bmatrix} 0 \\ PB \end{bmatrix}\right)^T>0 \tag{11}$$

식 (8)의 관계가 성립하므로, 식 (11)에 Schur Complement [1]를 적용하면 다음과 같은 행렬 부등식을 얻는다.

$$\begin{bmatrix} P-I+\sigma C^T K^T KC & A^T P & C^T K^T \\ PA & P-I & -\frac{1}{\sigma}PB \\ KC & -\frac{1}{\sigma}B^T P & \frac{1}{\sigma}I \end{bmatrix} >0 \tag{12}$$

$\widetilde{K}=\sigma K$ 로 정의하고, 행렬 $\begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & \sigma I \end{bmatrix}$를 식 (12)의 좌측과 우측에 곱하면, 다음 식을 얻는다.

$$\begin{bmatrix} P-I+\frac{1}{\sigma}C^T\widetilde{K}^T\widetilde{K}C & A^T P & C^T\widetilde{K}^T \\ PA & P-I & -PB \\ \widetilde{K}C & -B^T P & \sigma I \end{bmatrix} >0 \tag{13}$$

정리하면, 식 (6)을 만족하는 $P>0$ 와 K가 존재한다면, 식 (13)을 만족하는 $P>0$, $\sigma>0$ 와 $\widetilde{K}$가 존재함을 알 수 있다. 행렬 $X\geq 0$ 를 다음과 같이 정의하자.

$$X=\frac{1}{\sigma}C^T\widetilde{K}^T\widetilde{K}C \tag{14}$$

식 (14)는 다음 두식이 동시에 만족되는 것을 의미한다.

$$X-\frac{1}{\sigma}C^T\widetilde{K}^T\widetilde{K}C\ \geq\ 0 \tag{15}$$

$$Trace\ (X-\frac{1}{\sigma}C^T\widetilde{K}^T\widetilde{K}C)=0 \tag{16}$$

또한 식 (15)는 다음과 같이 선형행렬 부등식으로 표현할 수 있다.

$$\begin{bmatrix} X & C^T\widetilde{K}^T \\ \widetilde{K}C & \sigma I \end{bmatrix}\ \geq 0 \tag{17}$$

따라서 식 (14) 는 식 (16), (17)을 동시에 만족함을 의미하고, 다음과 같은 정리를 얻는다.

정리 1: 식 (2) 로 주어지는 시스템에 대하여 정적 출력 되먹임 안정화 제어이득 행렬 K가 존재한다면 적당한 행렬 $P>0$, $\widetilde{K}$ 와 양수 $\sigma>0$ 가 존재해서 다음 (18), (19), (20)식을 만족한다. 반대로, K 와 같은 형태의 구조적인 제약이 있는 $\widetilde{K}$ 와 $P>0$, $\sigma>0$ 가 (18), (19), (20)식을 만족한다면, $K=(1/\sigma)\widetilde{K}$는 식 (2)로 주어지는 시스템의 구조적인 제약이 있는 정적출력 되먹임 안정화 제어이득 행렬이 된다.

$$\begin{bmatrix} P-I+X & A^T P & C^T\widetilde{K}^T \\ PA & P-I & -PB \\ \widetilde{K}C & -B^T P & \sigma I \end{bmatrix} >0 \tag{18}$$

$$\begin{bmatrix} X & C^T\widetilde{K}^T \\ \widetilde{K}C & \sigma I \end{bmatrix}\ \geq 0 \tag{19}$$

$$Trace\ (\sigma X-C^T\widetilde{K}^T\widetilde{K}C)=0 \tag{20}$$

증명: 식 (18) 은 식 (14)를 사용하여 식 (13)을 다시 표현한 것이다. 따라서 식 (6) 이후의 설명과 같이, 정적 출력 되먹임 안정화 제어이득 행렬 K가 존재하는 경우, 적당한 $P>0$, $\widetilde{K}$, $\sigma>0$ 가 존재하여 식 (18), (19), (20)을 만족한다.

반대로 K와 같은 형태의 구조적인 제약이 있는 $\widetilde{K}$ 와 $P>0$, $\sigma>0$ 가 식 (18), (19), (20)을 만족한다고 가정하자. 식 (19) 와 (20)은 식 (14)를 의미하며, $K=(1/\sigma)\widetilde{K}$의 관계와 식 (14)를 사용하면, 식 (18)은 식 (12)로 변형된다. 식 (12)에 Schur Complement를 적용하면 식 (11)을 얻게 되고, 식 (11)을 정리하면 다음 식을 얻는다.

$$\begin{bmatrix} P & (A+BKC)^T P \\ P(A+BKC) & P \end{bmatrix} > I + \frac{1}{\sigma}\begin{bmatrix} 0 \\ PB \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & B^T P \end{bmatrix} \tag{21}$$

따라서 $K=(1/\sigma)\widetilde{K}$는 구조적인 제약이 있는 정적출력 안정화 제어이득행렬이 됨을 알 수 있다. (증명끝)

정리 1로부터, 다음과 같은 최적화 문제의 해를 구하면, 구조적인 제약이 있는 시스템의 정적 출력되먹임 안정화 제어기를 구할 수 있음을 알 수 있다.

문제 1:

Minimize $Trace\,(\sigma X - C^T\widetilde{K}^T\widetilde{K}C)$
Subject to : (18), (19)

식 (19)의 조건식은 식 (15)를 의미하고, 따라서 문제 1의 목적함수 값은 양수 또는 0이 되며, 만일 문제 1을 풀어서 얻은 최적해의 목적함수 값이 0이라면, 정리 1로부터 $K=(1/\sigma)\widetilde{K}$가 원하는 제어이득 행렬이 된다. 그러나 목적함수 값이 0이 아니더라도, $K=(1/\sigma)\widetilde{K}$는 안정화 제어이득행렬이 될 수 있다.

예를 들어, 다음 식과 같이 목적함수 값이 $d>0$ 라고 가정하자.

$$Trace\,(\sigma X - C^T\widetilde{K}^T\widetilde{K}C) = d \tag{22}$$

식 (22)가 만족되는 경우, 다음의 행렬부등식이 성립함은 쉽게 보일 수 있다.

$$X \le \frac{d}{\sigma} I + \frac{1}{\sigma} C^T\widetilde{K}^T\widetilde{K}C \tag{23}$$

식 (23)과 $K=(1/\sigma)\widetilde{K}$의 관계를 식 (18)에 적용하여 정리하면 다음과 같은 행렬 부등식을 얻는다.

$$\begin{bmatrix} P & (A+BKC)^T P \\ P(A+BKC) & P \end{bmatrix} > \begin{bmatrix} (1-\frac{d}{\sigma})I & 0 \\ 0 & I+\frac{1}{\sigma}PBB^T P \end{bmatrix} \tag{24}$$

따라서 $(d/\sigma)<1$ 가 만족되면, K는 안정화 제어이득행렬이 됨을 알 수 있다.

문제 1의 목적함수는 비볼록 함수이므로, 문제 1은 비볼록 최적화 문제로서, 전역 최적해(global optimal solution)를 구하기 어려운 문제이다. 형태는 다르지만, 비볼록 형태의 목적함수는 정적출력 안정화 제어기를 구하기 위한 최적화 문제에 흔히 나타난다[3]. 본 연구에서는, 비볼록 목적함수를 선형화한 후 얻어지는 선형행렬 부등식 문제를 반복적으로 풀어서 해를 구하는 Frank-Wolfe method 또는 conditional gradient method [3,6]를 사용하여 문제 1의 해를 구하는 다음과 같은 알고리즘을 제안한다.

알고리즘 1:

1) 식 (18)과 (19)로 주어지는 선형행렬 부등식을 만족하는 $\widetilde{K}_0$, P_0, σ_0 값을 구한다. $k=0$ 으로 놓는다.

2) 다음 선형행렬 부등식 문제를 풀어서 $\widetilde{K}_{k+1}$, P_{k+1}, σ_{k+1}을 구한다.

Minimize $Trace\,(\sigma_k X + \sigma X_k - 2C^T\widetilde{K}_k^T\widetilde{K}C)$
Subject to : (18), (19)

3) $K=(1/\sigma_k)\widetilde{K}_k$가 안정도를 보장하는 제어이득 행렬인 경우 중지한다. 그렇지 않은 경우, $k=k+1$ 로 놓고 2) 번 단계로 돌아간다.

참고 1: 알고리즘 1의 두 번째 단계의 최적화 문제는 선형행렬 부등식 문제이며, 사용된 목적함수는 문제 1의 비선형 목적함수를 선형화하여 얻은 것이다.

참고 2: 식 (22) 이후에 설명된 것처럼, 문제 1의 목적함수 값이 0 이 아니더라도 안정화 제어기를 얻을 수 있다. 따라서 세 번째 단계에서 목적함수 값을 검사하는 대신, $(A+BKC)$ 의 고유치(eigenvalue)를 검사하여 안정도를 판별한다.

III. 제어기 설계 예제

알고리즘 1은 MATLAB 의 LMI Toolbox 등을 사용하여 쉽게 구현할 수 있으며, 알고리즘 1으로 정적출력 되먹임 안정화 제어기 설계 문제를 풀었을 때, 대부분의 문제들이 효과적으로 풀리는 것을 확인할 수 있었다.

예를 들어, 식 (2)로 주어지는 시스템에서 $n=5$, $m=2$, $p=3$인 경우, 식 (4)의 형태로 제한된 제어이득 행렬을 사용하여 정적출력 안정화 제어기를 구하는 문제의 경우 87% 의 문제가 $k<100$ 이내에서 해결되었다.

이러한 결과는, 기존의 연구결과들을 사용하는 경우에는 달성할 수 없는 것이다. 예를 들어, 식 (2)로 주어지는 시스템의 행렬이 다음과 같다고 하자.

$$A = \begin{bmatrix} 0.6 & 0 & -1.3 & -0.8 & 0 \\ -0.8 & -0.6 & 0.4 & 0.2 & 0.1 \\ -0.6 & -0.4 & 0.1 & -0.5 & 0.6 \\ 1.2 & 0.4 & 0.2 & 0.6 & -0.2 \\ 0.6 & 1.0 & 0.6 & -0.3 & -0.2 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} -0.4 & 0.1 \\ 0.3 & -0.8 \\ 0.2 & 0 \\ -0.4 & 0.3 \\ 0.4 & 0.3 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{25}$$

제어이득 행렬은 다음 식과 같이 구조적인 제약이 있다고 가정하자.

$$K = \begin{bmatrix} k_1 & 0 & k_2 \\ 0 & k_3 & 0 \end{bmatrix} \tag{26}$$

본 연구에서 제안된 알고리즘 1을 사용하면, 다음과 같은 안정화 제어이득 행렬을 쉽게 얻을 수 있다.

$$K = \begin{bmatrix} 1.5806 & 0 & -1.2294 \\ 0 & -0.5895 & 0 \end{bmatrix} \tag{27}$$

식 (27)의 제어이득행렬을 사용하는 경우, 시스템의 극점이 다음과 같이 주어지며 안정함을 알 수 있다.

$$-0.8741,\ 0.3865 \pm 0.7902i,\ 0.0973 \pm 0.0953i \qquad (28)$$

그러나 제어이득행렬을 $K = NM^{-1}$ 형태로 표현하고 안정도 조건을 유도한 기존의 연구결과를 사용하는 경우, 예를 들어 [7]에서 유도한 선형행렬부등식을 사용하였을 때, 시스템을 안정화 시키는 제어이득 행렬을 구하는 것은 불가능하였다. 위 예제뿐 아니라, A, B 및 C 행렬을 불규칙하게 생성하여 얻은 대부분의 문제에서 [7]의 방법은 적용이 불가능 하였지만 본 연구에서 제안한 방법을 사용하는 경우 대부분의 문제에서 안정화 제어기를 구할 수 있었다.

참고 3: 위의 예에서 단순한 형태의 C 행렬을 사용한 것은, [7]의 연구 결과와 쉽게 비교하기 위한 것이며, 본 연구의 알고리즘 1은 일반적인 A, B, C 행렬에 적용이 가능하다.

IV. 결론

본 연구에서는 구조적인 제약이 있는 정적출력 되먹임 안정화 제어기가 만족해야할 필요충분조건을 유도하였다. 또한 유도된 조건을 만족하는 제어기는 비볼록 최적화 문제를 풀어서 얻을 수 있음을 보이고, conditional gradient method를 사용하여 비볼록 최적화 문제를 풀기위한 알고리즘을 제안하였다. 제안된 알고리즘은 선형행렬 부등식을 반복적으로 풀어서 제어기를 얻는 방법으로 수치적인 예를 통하여, 기존의 연구결과로는 해결할 수 없는 많은 문제들을 해결할 수 있으며, 구조적인 제약이 있는 정적출력 되먹임 안정화 제어기를 구하는 효과적인 방법임을 알 수 있었다.

REFERENCES

[1] S. Boud, L. El Ghaoui, E Feron, and V. Balakrishnan, *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*, SIAM Studies in Applied Mathematics, Philadelphia, PA: SIAM, vol. 15, 1994.

[2] V. Blondel and J. N. Tsitsiklis, “NP-hardness of some linear control design problems,” *European J. Contr.*, vol. 1, 1995.

[3] L.E .Ghaoui, F. Oustry, and M. AitRami, “A cone complementarity linearization algorithm for static output-feedback and related problems,” *IEEE Trans. Automatic Control*, vol. 42, no. 8, pp. 1171-1176, Aug. 1997.

[4] A. I. Zecevic and D. D. Siljak, “Control design with arbitray information structure constraints,” *Automatica,* vol. 44, no. 9, pp. 2642-2647, Sep. 2008.

[5] D. P. Bertsekas, *Nonlinear Programming*, Athena Scientific, 1995.

[6] J. Rubio-Massegu, J. M. Rossell, H. R. Karimi, and F. Palacios-Quinonero, “Static output-feedback control under information structure constraints,” *Automatica*, vol. 49, no. 1, pp. 313-316, Jan. 2013.

[7] C. A. R. Crusius and A. Trofino, “Sufficient LMI conditions for output feedback control problems,” *IEEE Trans. Automatic Control*, vol. 44, no. 5, pp. 1053-1057, May 1999.

[8] C. E. D. Souza and A. Trofino, “An LMI approach to stabilization of linear discrete-time periodic systems,” *Int. J. Control*, vol. 73, no. 8, pp. 696-703, 2000.

[9] G. I. Bara and M. Boutayeb, “Static output feedback stabilization with H_∞ performance for linear discrete-time systems,” *IEEE Trans. Automatic Control*, vol. 50, no. 2, pp. 250-254, Feb. 2005.

이 준 화

1987년 서울대 제어계측공학과 졸업. 1989년 동 대학원 석사. 1994년 동 대학 박사. 1995년~현재 서울시립대학교 전자전기컴퓨터공학부 교수. 관심분야는 강인제어이론 및 응용, 최적화기법을 사용한 제어기 설계.