

평면 직렬 메커니즘의 기하학적 속도 및 힘 해석

Geometrical Velocity and Force Analyses on Planar Serial Mechanisms

이 찬, 이재원*, 서태원*
(Chan Lee¹, Jeh Won Lee^{1,*}, and TaeWon Seo^{1,*})

¹School of Mechanical Engineering, Yeungnam University

Abstract: The kinematics with the instantaneous motion and statics of a manipulator has generally been proven algebraically. The algebraic solutions give very simple and straightforward results but the solutions do not have any meaning in physics or geometry. Therefore it is not easy to extend the algebraic results to design or control a robotic manipulator efficiently. Recently, geometrical approach to define the instantaneous motion or static relation of a manipulator is popularly researched and the results have very strong advantages to have a physical insight in the solution. In this paper, the instantaneous motion and static relation of a planar manipulator are described by geometrical approach, specifically by an axis screw and a line screw. The mass center of a triangle with weight and a perpendicular distance between the two screws are useful geometric measures for geometric analysis. This study provides a geometric interpretation of the kinematics and statics of a planar manipulator, and the method can be applied to design or control procedure from the geometric information in the equations.

Keywords: screw theory, axis and line screws, twist, planar serial mechanism, velocity analysis, force analysis

I. 서론

현대 산업사회에서는 로봇을 이용하는 작업환경이 점점 더 복잡해지고 있다. 대부분의 공학자들은 로봇설계에 있어서 원하는 작업범위와 모터의 용량을 좀 더 쉽게 결정하는 방법을 원한다. 일반적으로 로봇공학에서 제시된 속도해석이나 정적 힘 해석은 자코비안 행렬을 이용한다[1]. 자코비안 행렬을 이용하여 로봇을 분석하는 연구들이 활발히 수행되어왔다[2-4].

일반적으로 자코비안 행렬은 끝점의 위치 벡터를 관절 공간의 변수로 미분하는 것으로 구해진다. 구해진 자코비안 행렬은 로봇의 순간적인 위치에서 관절 속도 공간을 끝점 속도공간으로 선형 변환한다. 또한 자코비안의 역행렬을 이용하면 목표속도를 만드는 입력 속도를 바로 구해낼 수 있다. 하지만, 이 방법은 다변수 함수의 기구학식으로부터 단지 수식적으로 구해내었기 때문에 행렬에서 각 항목들이 가지는 물리적 의미를 직관적으로 알 수는 없다[5]. 그래서 로봇 자코비안을 구하더라도 이를 이용해서 원하는 로봇의 특성을 만족시키는 링크를 디자인하기는 어렵다. 이러한 이유로 대부분의 로봇 링크를 디자인하는 방법은 물리적 원리를 이용하기 보다는 컴퓨터를 사용하여 수치적으로 해결하는데 기반을 둔다.

최근에는 로봇기구를 해석하는데 있어서 자코비안 행렬의 물리적 의미를 이용하기 위해 기하학적으로 접근하는 몇몇 연구들이 진행되어 왔다. 기하학적 접근은 계산에 대한 불필요한 노력을 하지 않도록 직관성을 제공한다는 이점이 있다.

Müller 와 Reichert 는 로봇의 정적 힘을 계산하는 새로운 기하학적 방법을 제시하였다[6]. Zhang 은 컴퓨터 기반의 기하학적 알고리즘을 병렬로봇에 적용하였다[7]. Borras 는 Stewart-Gough platform을 기하학적으로 설계하고 그에 따른 특이점 자세를 분석하는 것에 대한 연구를 하였다[8]. Wen et al. 은 Grassmann-Cayley algebra 를 이용하여 wrench 자코비안 행렬을 정·역행으로 분석하는 방법을 제안하였고[9], Choi et al. 은 screw theory를 이용하여 기구의 특이점을 기하학적으로 분석하는 방법을 연구하였다[10].

본 논문은 screw의 합성에 대한 기하학적인 새로운 방법을 제시하여 자코비안 행렬의 의미를 분석하고자 하였다. 이렇게 재해석된 screw는 우리에게 로봇의 속도와 힘을 해석하는데 있어 직관성을 부여할 것이다. 이 논문은 3차원공간 기구의 해석에 앞서 2차원 평면 기구를 먼저 분석하여 일반적인 의미를 이끌어 내하고자 하였다.

II. 3-링크 평면로봇의 자코비안

그림 1과같이 회전조인트만을 가지는 3-링크 평면로봇의 기구학 식은 다음과 같다.

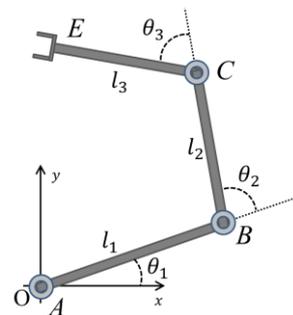


그림 1. 회전조인트 만을 가지는 3-링크 평면로봇.

Fig. 1. The planar three-link serial manipulator with revolute joints.

*Corresponding Author

Manuscript received December 29, 2014 / revised February 27, 2015 / accepted June 9, 2015

이찬, 이재원, 서태원: 영남대학교 기계공학부

(happyboy2510@gmail.com/jwlee@yu.ac.kr/taewon_seo@yu.ac.kr)

※ 본 연구는 2014년도 정부(교육부)의 재원으로 한국연구재단의 지원을 받아 수행된 연구임 (지역대학우수과학자사업, No. NRF-2014R1A1A4A01009290).

$$\begin{bmatrix} Px \\ Py \\ \phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) + l_3 \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) \\ l_1 \sin \theta_1 + l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) + l_3 \sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) \\ \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 \end{bmatrix} \quad (1)$$

또한 제시된 로봇에서 자유편수의 미분으로 이루어진 자코비안 J 는 다음 식과 같다.

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \theta_1} Px & \frac{\partial}{\partial \theta_2} Px & \frac{\partial}{\partial \theta_3} Px \\ \frac{\partial}{\partial \theta_1} Py & \frac{\partial}{\partial \theta_2} Py & \frac{\partial}{\partial \theta_3} Py \\ \frac{\partial}{\partial \theta_1} \phi & \frac{\partial}{\partial \theta_2} \phi & \frac{\partial}{\partial \theta_3} \phi \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$= \begin{bmatrix} -(l_1 s_1 + l_2 s_{12} + l_3 s_{123}) & -(l_2 s_{12} + l_3 s_{123}) & -l_3 s_{123} \\ (l_1 c_1 + l_2 c_{12} + l_3 c_{123}) & (l_2 c_{12} + l_3 c_{123}) & l_3 c_{123} \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

여기서

$$\begin{aligned} s_1 &= \sin \theta_1 & s_1 &= \sin(\theta_1 + \theta_2) & s_1 &= \sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) \\ c_1 &= \cos \theta_1 & c_1 &= \cos(\theta_1 + \theta_2) & c_1 &= \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) \end{aligned} \quad (3)$$

이다. 이때 식 (2)에서 자코비안의 각 성분들을 좌표성분으로 바꾸면 다음과 같다.

$$J = \begin{bmatrix} -y_E & -(y_E - y_B) & -(y_E - y_C) \\ x_E & (x_E - x_B) & (x_E - x_C) \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (4)$$

식 (4)를 이용하면 출력되는 끝점의 속도는 다음과 같이 표시된다.

$$\dot{P} = J \lambda = \begin{bmatrix} -y_E & -(y_E - y_B) & -(y_E - y_C) \\ x_E & (x_E - x_B) & (x_E - x_C) \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{P}x \\ \dot{P}y \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} \quad (5)$$

여기서

$$\begin{aligned} \dot{P}x &= -(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3)y_E + \omega_2 y_B + \omega_3 y_C \\ \dot{P}y &= (\omega_1 + \omega_2 + \omega_3)x_E - \omega_2 x_B - \omega_3 x_C \end{aligned} \quad (6)$$

이다. 식 (6)을 조인트 위치벡터에 수직인 방향벡터 $\bar{e}(\bar{E} \perp \bar{e})$, $b(\bar{B} \perp \bar{b})$, 그리고 $\bar{c}(\bar{C} \perp \bar{c})$ 로 나타내면

$$\bar{V} = \begin{bmatrix} \dot{P}x \\ \dot{P}y \end{bmatrix} = -(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3)\bar{e} + \omega_2 \bar{b} + \omega_3 \bar{c} \quad (7)$$

이다. 이 때 \bar{V} 는 끝점의 속도 벡터이며 이를 기하학적으로 나타내면 그림 2처럼 끝점에서 세계의 벡터 합으로 표현된다. 그림 2에서 볼 수 있듯이 직각 좌표계에서 자코비안을 구하면 로봇에 작용하는 각속도들이 물리적으로 어떻게 끝점 속도 벡터에 영향을 미치는지에 대해 직관적으로 나타내지 않는다.

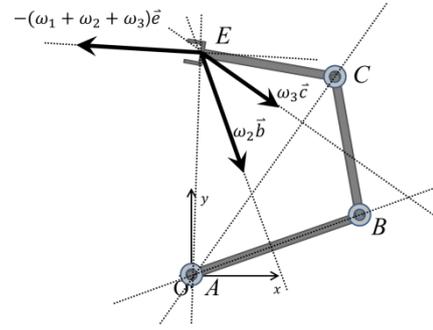


그림 2. 미분을 이용한 방법으로 구한 끝점의 속도 벡터.
Fig. 2. Vector components on end point E using differentiation.

III. SCREW THEORY

1. Twist와 Wrench

Screw는 강체에 작용하는 힘과 모멘트 또는 각속도와 선속도의 3차원 벡터 쌍으로 구성된 6차원 벡터이다. 이때 강체 내의 힘과 모멘트 벡터를 합쳐서 **screw** 벡터를 기반으로 표현한 것이 바로 **wrench**이다. 이와 유사하게 각속도와 선속도의 쌍을 **twist**라고 한다. **Screw** 벡터의 구성요소는 방향벡터와 원점에서 이에 수직인 방향 벡터로 표현하는 **Plucker** 좌표계로 정의된다[11].

Twist는 그림 3(a)처럼, 강체에 어떤 축을 중심으로 회전이가해질 때 기준 좌표계의 원점에 작용하는 속도와 각속도를 표현하는데 이를 식으로 표현하면

$$\hat{T} = [v_x \quad v_y; \omega_z]^T = \omega \$ \quad (8)$$

v_x, v_y 는 선속도이고, ω_z 는 각속도이며, $\$$ 는 식 (9)이며,

$$\$ = [y_0 \quad -x_0 \quad ; \quad 1]^T \quad (9)$$

여기서 x_0, y_0 는 $\$$ 의 평면상의 위치를 표현하는 변수이다.

따라서 평면상의 **twist**는 평면에 수직인 방향의 **axis screw**와 각속도의 곱으로 표현된다.

이와 유사하게 **wrench**는 그림 3(b)에서 보는 것처럼 강체에 **S**방향으로 외력이 가해질 때 기준점에서 발생하는 힘과 모멘트를 표현한다. 마찬가지로 공간상에서의 **wrench**는

$$\hat{W} = [f_x \quad f_y; m_z]^T = f S \quad (10)$$

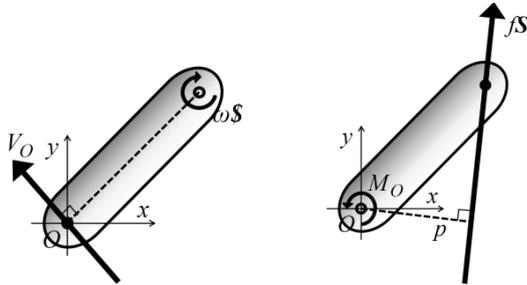
인데, 여기서

$$S = [\cos \theta \quad \sin \theta \quad ; \quad p]^T = [c \quad s \quad ; \quad p]^T \quad (11)$$

이다. 이 S 를 **line screw**라 칭한다. 여기서 c 와 s 는 S 의 방향 코사인을 의미하며 이때 θ 는 S 의 x 축과의 각도 값이다. 또한 p 는 S 와 원점 사이의 수직거리를 나타낸다.

2. Meet와 join

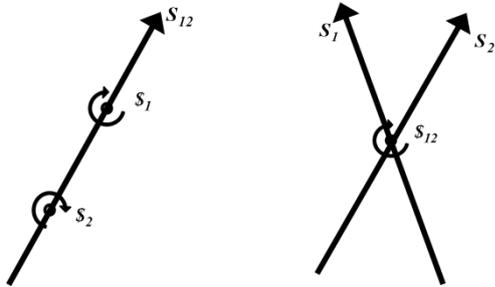
Meet와 **join**은 **Grassmann** 전개식에 의해 계산된다. **Grassmann** 전개식은 두 가지 같은 종류의 **screw**가 만들어내는 다른 종류의 **screw**를 구할 때 유용하다. 그림 4(a)에서 보는 것처럼 평면상에 두 **axis screw**가 있을 때 이를 지나는 **line screw**는 다음과 같이 계산된다.



(a) Plane twist on a rigid body. (b) Plane wrench on a rigid body.

그림 3. Twist와 wrench의 물리적 의미.

Fig. 3. Physical meaning of Twist and wrench.



(a) Line screw across two axis (b) Axis screw on intersecting point of two screws.

그림 4. 두 screw에 의해 생성되는 다른 종류의 screw.

Fig. 4. Different type of screw generated from two screws.

$$c_{12} = \begin{vmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \end{vmatrix}, \quad s_{12} = \begin{vmatrix} 1 & y_1 \\ 1 & y_2 \end{vmatrix}, \quad p_{12} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}. \quad (12)$$

여기서 c_{12} , s_{12} 그리고 p_{12} 는 S_1 과 S_2 가로지르는 S_{12} 의 성분이며, 이를 두 screw의 join 이라고 한다.

이와 유사하게 그림 2(b)처럼 두 line screw가 만나는 지점의 axis screw는 다음 식과 같이 계산된다.

$$y_{12} : x_{12} : 1 = \begin{vmatrix} s_1 & p_1 \\ s_2 & p_2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} c_1 & p_1 \\ c_2 & p_2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} c_1 & s_1 \\ c_2 & s_2 \end{vmatrix} \quad (13)$$

y_{12} 와 x_{12} 는 S_1 과 S_2 가 만나는 지점의 좌표로써 S_{12} 의 성분이 되며 이를 두 screw의 meet라고 한다.

3. Screw를 이용한 자코비안 결정

n 개의 링크를 가지고 각 링크가 모두 회전조인트를 가지는 평면 직렬 로봇에서 각 링크의 twist를 모두 더하고 각 조인트 각속도로 묶어내면 끝 링크의 twist를 알 수 있다. 이때 끝 링크의 twist는

$$\hat{T} = \hat{T}_1 + \hat{T}_2 + \dots + \hat{T}_n = [S_1 \quad S_2 \quad \dots \quad S_n] \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \vdots \\ \omega_n \end{bmatrix} = J\lambda \quad (14)$$

이다. 여기서 J 를 screw 자코비안이라고 하며, λ 는 순간자세에서의 조인트 각속도로 이루어진 공간벡터이다. 이를 다시 Plucker 좌표계로 표현하면

$$\hat{T} = \omega \begin{bmatrix} y \\ -x \\ 1 \end{bmatrix} = \omega_1 \begin{bmatrix} y_1 \\ -x_1 \\ 1 \end{bmatrix} + \omega_2 \begin{bmatrix} y_2 \\ -x_2 \\ 1 \end{bmatrix} + \dots + \omega_n \begin{bmatrix} y_n \\ -x_n \\ 1 \end{bmatrix} \quad (15)$$

이다. 식 (15)를 twist 방정식이라 한다.

IV. 기하학적 해석

1. 평면 직렬 로봇의 정방향 속도해석

모두 회전조인트를 가지는 평면 R-R-R 로봇에 속도 해석은 twist 방정식으로 계산한다. 로봇의 끝점에 기준좌표를 두고 각 조인트에 각속도 $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ 가 주어지면 twist 방정식은

$$\hat{T} = \omega \begin{bmatrix} y \\ -x \\ 1 \end{bmatrix} = \omega_1 \begin{bmatrix} y_A \\ -x_A \\ 1 \end{bmatrix} + \omega_2 \begin{bmatrix} y_B \\ -x_B \\ 1 \end{bmatrix} + \omega_3 \begin{bmatrix} y_C \\ -x_C \\ 1 \end{bmatrix} \quad (16)$$

이다. 여기서 조인트 위치벡터 \bar{A} , \bar{B} , 그리고 \bar{C} 에 수직인 벡터는 다음과 같이 표시 할 수 있다.

$$\bar{a} = \begin{bmatrix} y_A \\ -x_A \end{bmatrix}, \quad \bar{b} = \begin{bmatrix} y_B \\ -x_B \end{bmatrix}, \quad \bar{c} = \begin{bmatrix} y_C \\ -x_C \end{bmatrix} \quad (\bar{A} \perp \bar{a}, \quad \bar{B} \perp \bar{b}, \quad \bar{C} \perp \bar{c}) \quad (17)$$

식 (17)에 표현한 벡터들을 이용하면 그림 5처럼 기준점에 작용하는 선속도 벡터를 나타낼 수 있다. 이렇게 나타낸 선속도 성분은 조인트에서의 물리적 회전작용을 좀 더 직관적으로 표현한다.

한편 twist 방정식이 가지는 수학적 의미는 각 조인트에 발생하는 twist를 등가 twist 로 만드는 것이다. 등가 twist의 위치와 회전 크기를 알아내기 위해 식 (16)에서 3행의 구속조건 $\omega = \omega_1 + \omega_2 + \omega_3$ 을 이용하여 등가 twist의 좌표부분만을 남기고 이항하면

$$\begin{bmatrix} y \\ -x \end{bmatrix} = \left(\omega_1 \begin{bmatrix} y_1 \\ -x_1 \end{bmatrix} + \omega_2 \begin{bmatrix} y_2 \\ -x_2 \end{bmatrix} + \omega_3 \begin{bmatrix} y_3 \\ -x_3 \end{bmatrix} \right) / (\omega_1 + \omega_2 + \omega_3) \quad (18)$$

이다. 식 (18) 에서 최종 twist의 위치를 구해낼 수 있는데 이 위치는 그림 6(b)의 삼각형 ABC에서 각 꼭지점에 무게가 $\omega_1,$

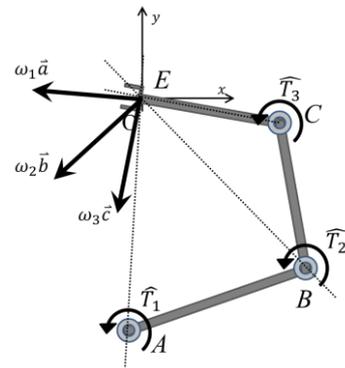
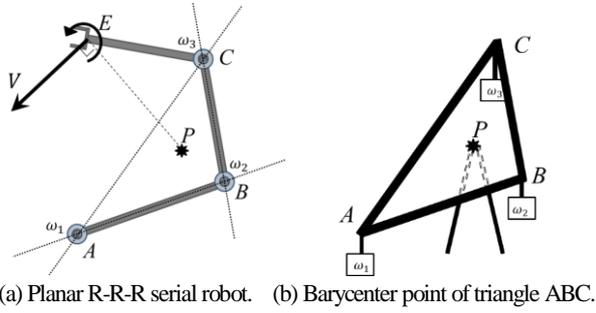


그림 5. Twist 방정식을 이용한 방법으로 구한 끝점의 속도 벡터 요소들.

Fig. 5. Vector components on end point E using twist equation.



(a) Planar R-R-R serial robot. (b) Barycenter point of triangle ABC.

그림 6. Twist방정식의 무게중심으로서의 기하학적 의미.

Fig. 6. Geometrical meaning of the Twist equation on the center of mass.

ω_2, ω_3 인 질량체가 달려 있다고 생각할 때 전체의 무게중심 점 P 와 일치한다. 따라서 최종 twist의 위치를 수식적으로 구할 수도 있지만, 각 조인트를 삼각형으로 생각하고 무게중심을 구하면 좀더 직관적이게 구해낼 수 있다는 것이다. 이를 연장해서 조인트가 추가되더라도 총 조인트 개수만큼의 꼭지점을 가지는 다각형의 무게중심만 구한다면 그 지점이 끝 링크의 twist지점이고, 최종적으로 끝점의 속도 V 는 twist 위치 P 점과 끝점 E 를 연결한 선과 수직으로 발생한다.

2. 역방향 속도해석

3개의 회전조인트를 가지는 평면 직렬 로봇에 끝점에 속도와 각속도가 주어지면 이를 twist로 표현할 수 있다. Twist의 정보로부터 각 조인트의 각속도를 해석하는 것은 식 (19)과 같이 screw 자코비안의 역행렬을 구할 수 있다. 먼저

$$\lambda = (J)^{-1} \hat{T} \quad (19)$$

이며, 여기서 $(J)^{-1}$ 는 J 의 역행렬로 식 (20)으로 표현된다 [11].

$$(J)^{-1} = \begin{bmatrix} S_{23}^T/S_{23}^T \cdot \$1 \\ S_{31}^T/S_{31}^T \cdot \$2 \\ S_{12}^T/S_{12}^T \cdot \$3 \end{bmatrix} \quad (20)$$

최종적으로 각 조인트의 각속도는 다음과 같이 axis screw와 line screw의 내적으로 표현할 수 있다.

$$\lambda = \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{23} \cdot \hat{T} / S_{23} \cdot \$1 \\ S_{31} \cdot \hat{T} / S_{31} \cdot \$2 \\ S_{12} \cdot \hat{T} / S_{12} \cdot \$3 \end{bmatrix} = \omega \begin{bmatrix} n_1/d_1 \\ n_2/d_2 \\ n_3/d_3 \end{bmatrix} \quad (21)$$

기하학적으로 각 조인트 각속도는 n_i 과 d_i 처럼 axis screw와 line screw의 기하학적 길이정보로 구할 수 있다.

조인트 각속도를 알아내기 위한 다른 방법은, 해석기하학을 이용하여 정방향해석과 같이 무게중심을 이용하는 것이다. 그림 7과 같이 질량이 없는 삼각형의 무게중심은 교점 P_{ABC} 에 위치한다. P_{AB}, P_{BC}, P_{CA} 는 각각 AB, BC, CA 의 중심점이다. 이 중심점들과 맞은편 방향의 각 꼭지점들을 지나는 직선을 $L_{ABC}, L_{BCA}, L_{CAB}$ 라 하면 이 세 직선은 단 하나의 교점 P_{ABC} 를 둔다. 만약 각 꼭지점에 무게가 있다고 한다면 무게중심 공식을 이용하여 각 중심점들을 계산할 수 있다.

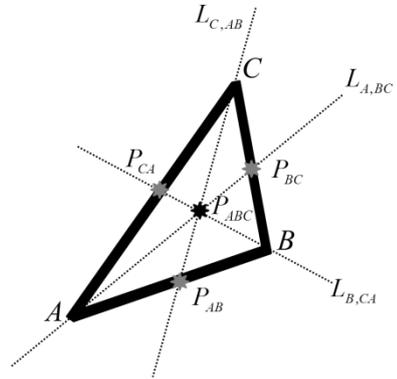
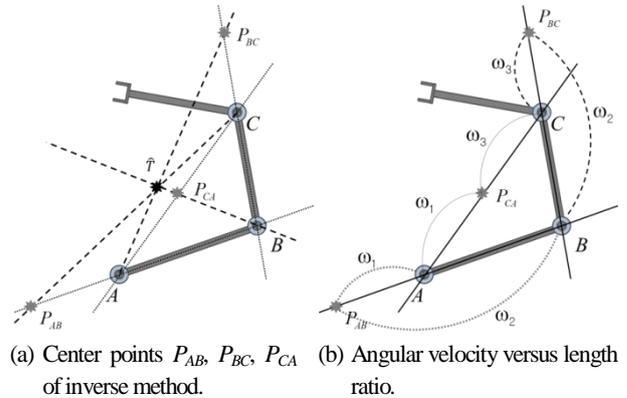


그림 7. 무게중심을 찾기 위한 기하학적 방법.

Fig. 7. Geometrical method to obtain the center of mass.



(a) Center points P_{AB}, P_{BC}, P_{CA} of inverse method. (b) Angular velocity versus length ratio.

그림 8. 기하학적으로 조인트 각속도를 구해내는 방법.

Fig. 8. Inverse way to obtain each joint angular velocity.

이러한 기하학적 접근을 반대로 적용해 보면 그림 8(a)에서 직선 $L_{ABC}, L_{BCA}, L_{CAB}$ 는 각 꼭지점과 twist점을 잇는 직선이 되고 이 직선이 각 모서리 AB, BC, CA 와 만나는 점이 중심점 P_{AB}, P_{BC}, P_{CA} 가 된다. 이 점들을 이용하여 그림 8(b)처럼 각 조인트 각속도의 비율을 알 수 있게 된다. 이때 교차점들과 직선은 Grassmann 전개식을 이용한 meet와 join으로 간단하게 계산된다.

그림 8(b)에서 각 중심점 P_{AB}, P_{BC}, P_{CA} 와 꼭지점들 사이의 길이 비는 $(\omega_2 : \omega_3), (\omega_3 : \omega_1), (\omega_1 : \omega_2)$ 과 같다. $(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3)$ 의 값이 일정하기 때문에 길이 정보로부터 각 조인트 각속도를 구할 수 있다.

3. 역방향 힘 해석

그림 9에서 $\hat{W}(=fS)$ 가 로봇 끝점에 가해질 때 각 조인트 반력은 힘과 속도가 서로 수직 관계임을 이용하여 수학적으로 J 의 전치를 사용하여 식 (22)와 같이 구할 수 있다.

$$\begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \end{bmatrix} = \gamma = J^T \hat{W} = f \begin{bmatrix} \$1 \cdot S \\ \$2 \cdot S \\ \$3 \cdot S \end{bmatrix} = f \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix} \quad (22)$$

이 때 $[p_1 p_2 p_3]$ 는 각 조인트와 \hat{W} 의 수직 거리이다. 이러한 기하학적 원리는 정방향 힘 해석에서 더 유용하게 사용할 수 있다.

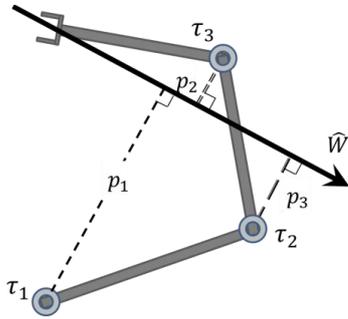


그림 9. Wrench와 각 조인트의 Axis screw간의 수직거리.
Fig. 9. Perpendicular distance between Wrench with joint Axis screws.

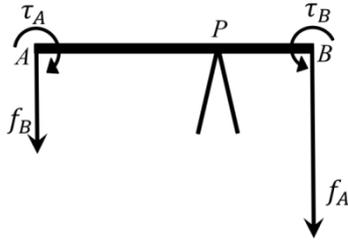


그림 10. 강체 AB에 작용하는 τ_A, τ_B 와 반력 f_A, f_B , 그리고 토크중심 P.
Fig. 10. τ_A, τ_B , reacted force f_A, f_B , and center of torques P at rod AB.

4. 정방향 힘 해석

그림 11과 같이 각 조인트에 토크가 주어졌을 때 발생하는 끝점의 힘을 계산하는 것은 반력 계산 원리를 이용하여 각 조인트 토크의 토크중심을 구할 수 있다.

그림 10처럼 단위길이의 강체 AB에 양단에 토크 τ_A, τ_B 가 작용하면 A지점에 f_B B지점에 f_A 가 반력으로 작용한다. 이때 힘의 평형점 P는

$$P = \frac{f_B A + f_A B}{f_B + f_A} \tag{23}$$

이다. AB의 길이가 단위크기임을 이용하여 f_A 는 τ_A 로, f_B 는 $-\tau_B$ 로 쓸 수 있다. 다음 $\tau_A \tau_B$ 로 분모분자를 나누어주면 P는 다음과 같다.

$$P = \frac{\tau_B A - \tau_A B}{\tau_B - \tau_A} = \frac{\frac{1}{\tau_A} A - \frac{1}{\tau_B} B}{\frac{1}{\tau_A} - \frac{1}{\tau_B}} \tag{24}$$

토크중심은 한 강체 내에 토크가 여러 지점에 작용하는 경우에 힘의 평형점을 찾아낼 수 있다는 물리적 의미를 가지고 있다. 따라서 속도해석처럼 3개의 링크 시스템을 동시에 합하여 무게중심을 계산하는 것은 불가능하다.

그림 11에서 각 Axis screw 쌍 ($\$A, \B), ($\$B, \C), ($\$C, \A)의 토크 중심 P_{AB}, P_{BC}, P_{CA} 는 식 (24)와 같이 계산된다. 결과적으로 각 조인트 토크들이 만드는 힘의 방향은 세 개의 토크 중심

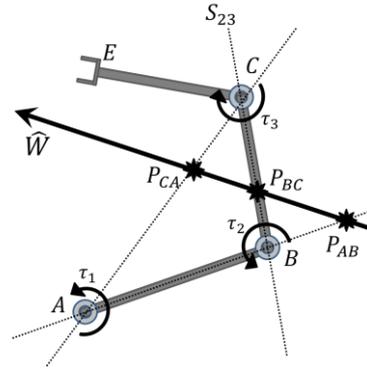


그림 11. 세 개의 토크중심을 지나는 최종 힘 벡터.
Fig. 11. Final force vector pass across three torque centers.

점을 동시에 통과하는 직선의 방향으로 생성되며 이 힘과 끝점 사이의 거리만큼 모멘트가 작용하게 된다.

V. 고찰

본 논문에서는 속도 및 힘해석을 위해 두 가지 다른 종류의 중심점을 사용하였다. 속도 중심점은 트위스트 계산식에서부터 모티브를 얻어 이를 기하학적으로 표현한 반면 토크 중심점은 물리적 의미에서부터 수식을 유도하였다. 따라서 속도중심점은 최종 twist를 구해내기 위하여 여러 개의 조인트 각속도를 사용할 수 있고 토크 중심점은 힘의 평형식으로부터 유도한다. 토크가 만드는 힘의 방향 또한 평면에 수평한 방향으로 주어지기 때문에 항상 두 개의 조인트 토크만을 사용할 수 있다.



그림 12. 강체 AB에서 두 각속도 또는 토크의 중심점의 위치.
Fig. 12. Center position in the case of two angular velocities and two torques on rigid body AB.

표 1. 두 물리적 토크와 각속도가 중심점을 위치시킬 수 있는 구역 비교.

Table 1. Comparison on the angular velocity and torque to make the Center point.

Section No.	Angular velocity ($\$$)	Torque ($\$$)
①	$ \$A > \$B $ and $0 > \$A \B	$0 < \$A < \B or $0 > \$A > \B
②	$\$A > \$B > 0$ or $\$A < \$B < 0$	$ \$A < \$B $ and $0 > \$A \B
③	$0 < \$A < \B or $0 > \$A > \B	$ \$A > \$B $ and $0 > \$A \B
④	$ \$A < \$B $ and $0 > \$A \B	$\$A > \$B > 0$ or $\$A < \$B < 0$

또 다른 차이점은 부호와 크기의 방향에 영향이 다르다는 점이다. 속도중심은 그림 12에서 A와 B지점에 같은 방향의 각속도를 가했을 때 A와 B 내부에 속도중심이 생기고, 토크 중심은 서로 다른 방향의 토크를 가했을 때 A와 B 내부에 토크중심이 생긴다. 그리고 속도중심은 각속도 값이 작은 쪽으로 형성되지만 토크중심은 토크 값이 큰 쪽으로 형성된다. 이같이 쌍대(dual)적으로 나타나는 힘과 속도 중심은 힘과 속도는 서로 수직한 방향으로 나타나는 물리적 원리와도 일치한다고 볼 수 있다. 위에서 설명한 각속도와 토크 중심점의 서로 다른 특성을 표 1에 정리하였다.

VI. 결론

본 논문에서는 screw를 기반으로 하여 속도와 토크 중심을 이용한 기하학적 측정을 통하여 보다 쉽게 기하학적 해석을 수행할 수 있음을 제안하였다. 이러한 기하학에 기반한 원리를 적용하면 제어나 설계에 있어서 더 간단하며 직관적인 과정을 제공할 수 있다. 로봇의 끝점 속도와 힘의 순방향, 역방향 해석을 복잡한 미분 등의 과정 없이 오로지 기하학적 원리를 통해 해석할 수 있으므로 로봇을 기구 변수 설계 및 액추에이터 설계에 직관적으로 응용할 수 있다. 본 논문의 속도와 토크중심 기반의 해석 방법은 3차원 기구해석에 적용할 계획이다.

REFERENCES

- [1] NIKU, Saeed B. *Introduction to Robotics: Analysis, Systems, Applications*, New Jersey: Prentice Hall, 2001.
- [2] W.-J. Zhang, J. Zou, L. G. Watson, W. Zhao, G. H. Zong, S. S. Bi, "The constant Jacobian method for kinematics of a three DOF planar micro motion stage," *Journal of Robotic Systems*, vol. 19, no. 2, pp. 63-72, 2002.
- [3] H. R. Mohammadi Daniali, P. J. Zsombor-Murray, and J. Angeles, "Singularity analysis of planar parallel manipulators," *Mechanism and Machine Theory*, vol. 30, no. 5, pp. 665-678, 1995.
- [4] S. A. Joshi and L.-W. Tsai, "Jacobian analysis of limited-DOF parallel manipulators," In: ASME 2002 International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference. American Society of Mechanical Engineers, pp. 341-348, 2002.
- [5] O. Ma and J. Angeles, "Optimum architecture design of platform manipulators," In: *Advanced Robotics, 1991. 'Robots in Unstructured Environments'*, 91 ICAR., Fifth International Conference on. IEEE, pp. 1130-1135, 1991.
- [6] Y. H. Zhang, X. J. Du, and B. Y. Zhang, "Synthesis and analysis of 4-DOF parallel manipulators of computer aided geometry approach," *Advanced Materials Research*, 912: 1010-1016, 2014.
- [7] J. Borras, F. Thomas, and C. Torras, "New geometric approaches to the analysis and design of stewart-gough platforms," *Mechatronics, IEEE/ASME Transactions on*, vol. 19, no. 2, pp. 445-455, 2014.
- [8] K. F. Wen and J. W. Lee, "Statics, instantaneous kinematics and singularity analysis of planar parallel manipulators via grassmann-cayley algebra," *Applied Mechanics and Materials*, 532: 378-381, 2014.

- [9] J.-H. Choi, T. W. Seo, and J. W. Lee, "Singularity analysis of a planar parallel mechanism with revolute joints based on a geometric approach," *International Journal of Precision Engineering and Manufacturing*, vol. 14, no. 8, pp. 1369-1375, 2013.
- [10] J. Gray, Möbius's geometrical mechanics. Fauvel, J., et al, 1993.
- [11] Duffy, Joseph, "Statics and kinematics with applications to robotics," Cambridge University Press, 2007.



이 찬

2013년 영남대학교 기계공학부 기계시스템전공 졸업. 2013년~현재 영남대학교 대학원 기계공학과 석사과정 재학중. 관심분야는 산업용로봇, Haptic 인터페이스, Screw theory.



이 재 원

1979년 서울대학교 기계공학부(공학사). 1981년 한국과학기술원 기계공학부(공학석사). 1990년 Georgia Institute of Technology 기계공학부(공학박사). 1991년~현재 영남대학교 기계공학부 교수. 관심분야는 parallel robotics and haptic rendering.



서 태 원

2003년 서울대학교 기계항공공학부(공학사). 2008년 서울대학교 기계항공공학부(공학박사). 2010년~현재 영남대학교 기계공학부 조교수. 관심분야는 기계설계, 최적설계, 제어, 로봇의 경로 계획.