



스털링 엔진의 진동 해석 및 설계

김 동 준

(서울과학기술대학교)

1. 머리말

스털링 엔진(stirling engine)은 밀폐된 작동기체를 서로 다른 온도에서 두 개의 피스톤의 왕복운동을 통하여 압축·팽창시켜 열에너지를 운동에너지로 변환하는 스텔링 사이클에 기반한 열기관이다. 스텔링 엔진은 내연기관과 달리 폭발행정이 없기 때문에 소음/진동이 작다. 특히, 외연기관이므로 기존 화석연료뿐 아니라 내연기관 배기열과 같은 다양한 미활용 폐열, 태양열/지열 등과 같은 신재생 열에너지, 석탄/펠릿 등 고체 연료 등의 모든 열원을 이용할 수 있는 열기관이다.

기구형 스텔링 엔진은 파워 피스톤(power piston)과 디스플레이서(displacer piston)를 물리적으로 연결하는 기구부(커넥팅 로드, 크랭크 샤프트, 플라이휠)를 구비하는데, 각 피스톤의 운동 및 위상차를 정확하게 조절할 수 있지만, 기구부에 의해 상당한 측면 하중이 발생하여 피스톤 마멸 문제를 야기한다. 더불어 기구부로 인하여 엔진의 크기와 무게가 커지고 기계적 손실과 밀봉 문제로 인하여 성능을 저하시킨다. 이러한 단점을 보완하기 위해서 프리 피스톤 스텔링 엔진(free-piston stirling engine, FPSE)은 기구부를 제거하고 각각의 피스톤에 스프링을 연결하여 스프링의 복원력을 이용한 피스톤의 운동을 발생시

키는 진동시스템을 구성한 장치이다.

FPSE는 2개의 피스톤이 내부 작동기체에 연성되어 공진 특성으로 작동한다. 대부분의 진동시스템은 시스템의 과진동을 억제하기 위해 공진 회피설계를 하지만, FPSE는 반대로 출력을 높이기 위해 공진을 형성해준다. 공진은 일반적으로 시스템의 고유진동수와 가진주파수가 같아질 때 발생하므로 좁은 영역을 가진다. 따라서 FPSE는 좁은 작동 범위를 가진다. 여기서 작동 범위는 온도차, 충전 압력, 외부부하의 크기와 같은 엔진에 가하는 외부입력요소이다. 온도차는 일정 온도 이상이 되면 엔진이 작동하고, 온도차가 커질수록 외부 열에너지를 많이 받는 것의 의미이기 때문에 성능이 높아진다. 하지만, 충전 압력과 외부부하는 무조건 클수록 성능에 도움이 된다고 말하기 어렵다. 왜냐하면 엔진의 설계에 따라 최대 성능을 가지는 충전 압력과 외부 부하의 최적점이 존재하기 때문이다. 압력과 부하의 최적점이라는 것은 결국 출력을 통해 확인되고, 그 때의 출력은 동적 거동으로 결정된다. 즉, FPSE의 올바른 설계를 위해서는 첫 번째로 엔진의 설계에 따른 작동범위를 예측할 수 있어야 하고, 두 번째로 작동범위에서의 동적 거동 예측이 중요하다.

FPSE의 설계에서 가장 중요한 요소는 바로 진동설계 파라미터 (M, C, K)의 결정이다. 두 피스톤

$$\begin{bmatrix} m_p & 0 \\ 0 & m_d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_p \\ \ddot{x}_d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{pc} + c_p & 0 \\ -c_{p_he} & c_d - c_{d_he} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_p \\ \dot{x}_d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_p & 0 \\ 0 & k_d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_p \\ x_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (P - P_B)(A_p - A_r) \\ (P - P_B)A_r \end{bmatrix} \quad (1)$$

운동방정식은 압력에 의해 가진되는 강제응답으로 표현된다. A_d , A_p , A_r 은 각각 DP, PP, DP rod의 단면적을 나타낸다. x_p , x_d 는 각각 PP, DP 변위이고, m_p , m_d 는 각각 PP, DP 질량이다. k_p , k_d 는 각각 PP, DP 스프링 강성이며 선형으로 가정한다. FPSE에서 발생하는 복합감쇠는 각각 c_p , c_d 로 표현하고, 압력강하 감쇠는 c_{p_he} , c_{d_he} 외부부하 감쇠는 c_{pc} 로 각각 나타내었다. 압력은 작동기체 부피와 연성되어 있으므로, 작동기체를 이상기체로 가정하여 이상기체 상태방정식을 이용해 압력을 피스톤 변위로 정의한다¹⁾. 엔진 내부는 압력이 동일한 닫힌 계로 가정한다. 여기서 V_H , V_R , V_K 는 열교환기와 재생기의 볼륨이므로 변하지 않지만, V_E 와 V_C 는 피스톤의 운동에 따라 변하므로, 피스톤 변위로 표현하면 압력은 비선형으로 정의된다.

$$P = m_{total} R \left(\frac{V_H}{T_H} + \frac{V_E}{T_E} + \frac{V_R}{T_R} + \frac{V_C}{T_C} + \frac{V_K}{T_K} \right)^{-1} \quad (2)$$

$$P_B = P_{mean} \left[V_{B0} / \left\{ V_{B0} - (A_p - A_r)x_p \right\} \right]^\gamma \quad (3)$$

그러므로 선형화를 위해 이항확장을 이용하여 압력을 선형화한다¹⁾. 이 때 이항확장으로 1차항만을 고려하고, 2차항부터는 모두 무시하게 된다. 이 때 2차항 이상을 고려하게 되면 비선형 운동방정식이 도출된다.

$$P \approx P_{mean} \left\{ 1 - \frac{A_d x_d}{T_H S} - \frac{(A_p - A_r)(x_p - x_d)}{T_K S} \right\} \quad (4)$$

$$P_B \approx P_{mean} \left[1 + \gamma \left\{ (A_p - A_r) / V_{B0} \right\} x_p \right] \quad (5)$$

선형화된 압력을 식 (1)에 대입하여 식을 풀면 최종으로 선형화 운동방정식 (6)이 도출된다. 식 (1)에서 가진력으로 작용하던 압력이 강성행렬로 들어가면서 강제응답에서 자유진동방정식으로 변환되고, 시스템 강성은 스프링 강성과 압력에 의한 강성의 조합으로 표현된다. 즉, FPSEs의 진동 설계 파라미터는 두 피스톤의 질량이 1 kg 이고, D_{xx} , S_{xx} 의 감쇠, 강성을 가지는 자유진동시스템으로 표현할 수 있다.

$$\begin{bmatrix} \ddot{x}_p \\ \ddot{x}_d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{pp} & D_{pd} \\ D_{dp} & D_{dd} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_p \\ \dot{x}_d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} S_{pp} & S_{pd} \\ S_{dp} & S_{dd} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_p \\ x_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6)$$

여기서,

$$D_{pp} = \frac{c_{pc} + c_p}{m_p}$$

$$S_{pp} = \frac{1}{m_p} \left[k_p + P_{mean} (A_p - A_r)^2 \left(\frac{1}{T_K S} + \frac{\gamma}{V_{B0}} \right) \right]$$

$$D_{pd} = 0$$

$$S_{pd} = \frac{(A_p - A_r)}{m_p S} P_{mean} \left\{ \frac{A_d}{T_H} - \frac{(A_p - A_r)}{T_K} \right\}$$

$$D_{dp} = -\frac{c_{p_he}}{m_d}$$

$$S_{dp} = \frac{A_r (A_p - A_r)}{m_d} P_{mean} \left\{ \frac{1}{T_K S} + \frac{\gamma}{V_{B0}} \right\}$$

$$D_{dd} = \frac{c_d - c_{d_he}}{m_d}$$

$$S_{dd} = \frac{1}{m_d} \left\{ k_d + \frac{P_{mean} A_d A_r}{T_H S} - \frac{P_{mean} A_r (A_p - A_r)}{T_K S} \right\}$$

선형화 운동방정식(식 (6))에서 상태변수를 정의해 상태공간방정식을 아래와 같이 정의하여 근궤적 선도는 상태공간방정식의 고유치 변화로 엔진의 최적 작동점, 주파수를 예측한다. 이

때 고유치는 복소수의 형태로 나타나며, 실수부는 시스템의 발산, 수렴, 조화운동을 결정하며 허수부는 작동주파수를 결정한다. 실수부가 최대가 될 때 시스템의 공진이 가장 커지는 것을 의미하므로 최대출력이 된다.

$$z_1 = x_p, z_2 = x_d, z_3 = \dot{z}_1, z_4 = \dot{z}_2$$

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \dot{z}_3 \\ \dot{z}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -S_{pp} & -S_{pd} & -D_{pp} & -D_{pd} \\ -S_{dp} & -S_{dd} & -D_{dp} & -D_{dd} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{bmatrix} \quad (7)$$

이에 따라 근궤적 선도는 상태공간방정식의 4차 특성방정식은 4개의 극(pole)을 형성하는데, 우측상단 극만 분석에 사용한다. 왜냐하면 하단 2개의 극은 켈레 복소근이고, 좌측상단 극은 엔진 작동 시 빠르게 수렴하는 과도응답이기 때문이다.

일반적으로 2자유도 진동시스템에서 작동주파수는 각각의 자유도의 공진주파수 사이에서 형성되고, 두 주파수가 일치할 때 최대의 공진특성을 나타낸다. 이러한 공진특성의 원리를 이용하여 제안 해석기법은 선형화 운동방정식 (6)에서 충전 압력과 같은 운전 조건 변화에 따라 두 피스톤의 고유진동수(감쇠)가 일치할 때 엔진은 작동 최적점이 되고, 엔진의 작동주파수가 된다는 것이다. 이론은 식 (8)로 표현된다. 이 때 강성과 감쇠의 교차항은 무시한다고 가정한다. 각 피스톤의 고유진동수, 감쇠비, 감쇠고유진동수는 식 (9)과 같이 정의된다.

$$" \omega_{S_{pp-d}} = \omega_{S_{dd-d}} = \omega " \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \omega_{S_{pp}} &= \sqrt{S_{pp}} \quad \zeta_{pp} = D_{pp} / 2\sqrt{S_{pp}} \\ \omega_{S_{pp-d}} &= \omega_{S_{pp}} \sqrt{1 - \zeta_{pp}^2} \\ \omega_{S_{dd}} &= \sqrt{S_{dd}} \quad \zeta_{dd} = D_{dd} / 2\sqrt{S_{dd}} \\ \omega_{S_{dd-d}} &= \omega_{S_{pp}} \sqrt{1 - \zeta_{dd}^2} \end{aligned} \quad (9)$$

3. FPSE 동역학 해석

충진 압력 변화에 따른 시스템의 강성의 경우, S_{pp} 는 충전 압력이 증가함에 따라 급격하게 증가하고, S_{dd} 는 완만하게 감소하는 경향을 보이게 된다. 감쇠는 직렬감쇠가 지배적이고, 상수로 정의하였기 때문에 충전 압력에 따라 변화 없다.

근궤적 선도는 충전 압력 변화에 따라 고유치가 상단으로 이동하면서, 발산하다가 수렴한다. 최적작동점은 고유치 실수부가 최대가 되는 최대발산점이고, 이 때의 허수부는 작동주파수가 된다. 하지만 근궤적 해석에서 최대 발산점이 실제 최대출력을 의미하는 지를 고찰할 필요가 있다. 기존에는 고유치 실수부가 클수록 발산을 의미하므로, 스트로크와 출력이 증가를 의미한다고 생각하였지만, 고유치 실수부 값과 PP 진폭, PP-DP 진폭비를 비교한 결과, 고유치 실수부 최대는 진폭이 아닌 진폭비의 최대를 의미한다. 출력은 대체로 PP 진폭과 비례하기 때문에 고유치 실수부 최대값과 최대 출력과의 연관성은 불명확하다. 그러므로 고유치의 실수부로 작동압력을 예측하는 것에는 부적합하다는 것을 알 수 있다.

반면, 충전 압력에 따른 피스톤 감쇠고유진동수와 실험결과 엔진의 주파수, 피스톤 스트로크를 통하여 분석한 제안 해석법은 다음과 같다. 충전 압력이 증가할 때 PP 감쇠고유진동수는 급격히 증가하고, DP 감쇠고유진동수는 완만하게 감소한다. 이는 식 (1)에서 PP에 작용하는 압력에 의한 가진력이 큰 것에 기인한다. 또한 S_{pp} 와 S_{dd} 의 거동을 통해 먼저 확인할 수 있다. 이 때 발생하는 교차점이 작동 최적점이 된다. 이 해석을 통해 알 수 있는 것은 엔진은 두 피스톤의 감쇠고유진동수가 일치할 때 시스템이 공진조건이 되는 것을 의미한다. 그리고, 디스플레이서의 감쇠고유진동수는 거의 변하지 않아, 시스템의 작동주파수를 결정하고, 작동하는 압력은 파워피스톤의 감쇠고유진동수를 통해 결정된다. 즉, 작동주파수는 디스플레이서의 감쇠고유진동수에 지배

되고, 디스플레이서 감쇠고유진동수가 결정되었다면 작동 충진 압력은 파워피스톤의 감쇠고유진동수에 의해 결정되는 것을 의미한다.

근궤적 해석과 제안 해석기법을 비교해 보면, 작동주파수 예측은 두 해석이 약 10% 이내로 비슷한 수준이지만, 최적압력 예측은 두 해석이 상당한 값의 차이가 있는 것을 확인할 수 있다. 근궤적 해석은 직렬 강성, 감쇠 뿐 아니라 교차 강성, 감쇠도 고려하고, 제안 해석기법은 교차 강성, 감쇠를 무시하므로 나타나는 오차라고도 볼 수 있지만, 근궤적 해석에서 최대발산점이 실제 최대출력을 의미하는지를 고찰할 필요가 있다.

즉, 충진 압력에 따른 해석으로 구한 고유치 실수부와 진폭비를 비교해 보면, 두 값의 경향성과 최대점이 일치함으로써 고유치 실수부 최대는 진폭이 아닌 진폭비의 최대를 의미함을 알 수 있다. 즉, 진폭비의 최대는 최대진폭을 의미하지 않고, 출력은 대체로 진폭과 비례하기 때문에 최대 출력과도 연관이 없다는 것을 알 수 있다. 그러므로 고유치의 실수부로 최적작동압력을 예측하는 것에는 부적합하다는 것을 알 수 있다.

4. 맺음말

지금까지 FPSEs의 국내·외 연구 현황을 보면 진동 설계 최적화에 대해 다룬 내용이 거의 없다. 하지만 진동 설계는 실제로 FPSE의 성능에 큰 영향을 끼치는 가장 중요한 요소이므로 FPSE 기술 개발에 있어 올바른 진동설계는 매우 중요하다.

FPSE는 공진에서 작동하는 2자유도 진동시스템으로써 진동설계 시 작동 압력과 주파수의 예측 방법은 엔진의 공진 작동메커니즘을 고려한 방법이 더욱 효과적임을 알 수 있다. 특히, FPSE 모델링에 일반적으로 사용하는 선형화 운동방정식을 이용하여 압력강성을 고려한 피스톤의 감쇠고유진동수가 일치할 때 엔진의 최적작동점이라는 가설을 해석적으로 분석하였다. 또한 새로 제안한 해석기법이 기존의 방법인 근궤적 해석과 비교하였을 때의 차이점에 대해 고찰하였고, FPSE의 거동을 예측하는데 근궤적 해석을 사용하는 것에 대한 부적합성에 대해 고찰하였다. **KSNVE**

참고문헌

- (1) Urieli, I. and Berchowitz, D. M., 1984, Stirling Cycle Engine Analysis, Adam Hilger Ltd.
- (2) Redlich, R. W. and Berchowitz, D. M., 1985, Linear Dynamics of Free-piston Stirling Engines, IMechE, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science, Vol. 199, No. A3, pp. 203~213.
- (3) Riofrio, J. A., Al-Dakkan, K., Hofacker, M. K. and Barth, E. J., 2008, Control-based Design of Free-piston Stirling Engine, Proceedings of 2008 American Control Conference, WeC09.4, pp. 1533~1538.