

Prediction of Probabilistic Distribution of a Loudspeaker's Performance Due to Manufacturing Tolerances by Performance Moment Integration Method

Byung-su Kang, Jong Hyun Back, and Dong-Hun Kim*

Department of Electrical Eng., Kyungpook National University, Daegu 41566, Korea

(Received 23 May 2016, Received in final form 15 June 2016, Accepted 15 June 2016)

This paper introduces a performance integration method to predict variation characteristic of a performance function of electromagnetic machines or devices due to manufacturing tolerances. A normalized performance function space and a hybrid mean value technique are adapted to effectively predict mean and variance, which can identify probabilistic distribution of the performance function. To verify the effectiveness and accuracy of the proposed method, a mathematical problem and a loudspeaker model are tested, and numerical results are compared with those of existing methods such as Monte Carlo simulation and univariate dimension reduction method.

Keywords : electromagnetics, performance moment integration, probabilistic performance function, manufacturing tolerance

성능 모멘트 적분법을 이용한 제작공차에 의해 발생하는 스피커 성능함수의 확률분포 특성 예측

강병수 · 백종현 · 김동훈*

경북대학교 전기공학과, 대구시 북구 대학로 80, 41566

(2016년 5월 23일 받음, 2016년 6월 15일 최종수정본 받음, 2016년 6월 15일 게재확정)

본 논문에서는 제작공차에 의해 전기기기 및 소자 관련 제품에서 발생하는 성능함수의 변동특성을 예측하기 위해서 성능 모멘트 적분법을 도입하였다. 성능함수의 확률론적 분포특성을 판단할 수 있는 평균과 분산을 효율적으로 계산하기 위해서 정규분포로 변환된 성능함수 공간과 혼합형 평균치 기법을 채용하였다. 제안된 기법의 수치적인 효율성과 정밀도를 검증하기 위해서 간단한 수학예제와 스피커 모델에 적용하여 예측된 성능함수의 확률분포 특성을 차원감소법과 몬테카를로 수치모사법의 결과와 비교하였다.

주제어 : 전자기, 성능 모멘트 적분법, 확률성능함수, 제작공차

I. 서 론

최근 국내 · 외 산업시장의 경쟁이 날로 심화됨에 따라 전기기기 및 소자의 성능뿐 아니라 품질에 대한 소비자의 욕구가 지속적으로 증가하고 있다. 따라서 제품의 설계단계에서부터 제작공차, 재료 및 운전조건 등에 포함된 불확실성(uncertainty)에 기인한 제품에 관련된 품질변동 특성의 고려가 요구된다[1-4].

지금까지 수행된 대부분의 전기기기 및 소자 관련 연구는

해석과 설계 과정에서 모든 설계변수를 편의상 상수 값으로 가정하여 수행되었다. 그러나 실제 양산 제품의 치수는 제작 과정에서 필연적으로 발생하는 공차에 의해 고유한 확률분포 특성을 지니며, 이로 인해 제품의 성능 또한 특정 확률분포에 의한 변동특성을 나타낸다. 따라서 체계적인 양산품의 품질관리를 위해서는 제품의 해석과 설계과정에서 불확실 인자를 반영한 성능함수의 변동특성을 예측할 수 있는 확률론적 수치해석기법의 도입이 요구된다.

본 논문에서는 제작공차에 기인한 설계변수의 임의성(randomness)이 제품 성능에 미치는 변동특성을 정밀하게 예측하기 위해서 성능 모멘트 적분법(performance moment integration: 이하 PMI)을 도입하였다. PMI는 성능함수의 최

© The Korean Magnetics Society. All rights reserved.

*Corresponding author: Tel: +82-53-950-5603,

Fax: +82-53-950-5603, e-mail: dh29kim@ee.knu.ac.kr

대 손상 가능점(most probable failure point: 이하 MPP) 정보를 활용하여 수치적분을 수행함으로써 성능함수의 확률론적 분포특성을 판단할 수 있는 평균과 분산을 도출한다[5, 6]. 정규분포로 변환된 설계공간에서 효율적으로 MPP를 탐색하기 위하여 혼합형 평균치(hybrid mean value)기법이 채용되었다[3, 7].

제안된 기법의 수치적인 효율성과 정밀도를 검증하기 위하여 간단한 수학예제와 스피커 모델에 적용하여 예측된 성능함수의 확률분포 특성을 단변수 차원감소법(univariate dimension reduction method: 이하 uDRM)과 몬테카를로 수치모사법(Monte Carlo simulation method: 이하 MCS)의 결과와 비교하였다.

II. 성능함수 변동특성 예측기법

실제 공학문제는 Fig. 1과 같이 전자기 시스템의 입력부에 임의의 확률분포를 갖는 설계변수에 의해 출력부의 성능함수 또한 특정한 확률분포를 갖는 변동특성을 나타낸다.

따라서 이러한 불확실성이 내재한 공학문제를 다루기 위해서는 확률 성능함수의 분포를 정량적으로 평가할 수 있는 수치해석기법이 요구된다. 본 장에서는 확률 성능함수의 변동특성을 판별할 수 있는 통계 모멘트(statistical moment)인 평균(mean)과 분산(variance)을 시스템 입력부인 설계변수 공간과 출력부의 성능함수 공간에서 각각 평가하는 대표적인 수치기법인 uDRM과 PMI에 대하여 기술한다.

1. 단변수 차원감소법

확률 설계변수 벡터 \mathbf{x} 를 갖는 성능함수 $h(\mathbf{x})$ 의 평균 μ_h 과 분산 σ_h^2 는 식(1)과 같이 다중 적분형태로 표현된다[1, 2, 4].

$$\begin{aligned} \mu_h &\cong E(h(\mathbf{x})) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} h(\mathbf{x}) f_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \\ \sigma_h^2 &\cong E(h(\mathbf{x}) - \mu_h)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} (h(\mathbf{x}) - \mu_h)^2 f_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \end{aligned} \quad (1)$$

여기서 $\mathbf{x} = \{x_1, \dots, x_n\}$ 는 n 개의 확률 설계변수를 의미하며 $f_{\mathbf{x}}(\mathbf{x})$ 는 \mathbf{x} 의 결합 확률밀도함수(joint probability density function)를 표시한다.

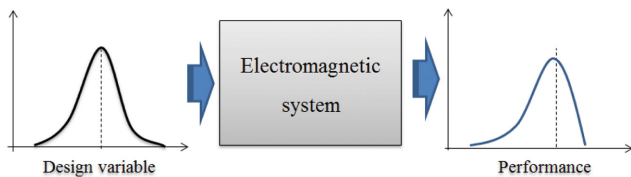


Fig. 1. (Color online) System performance due to uncertainty in real engineering problems.

설계변수가 서로 독립적이라고 가정하면 결합 확률밀도함수는 확률밀도함수의 곱으로 표현된다. 이런 성질을 이용하여 성능함수의 통계 모멘트를 식(2)와 같이 수치적분 형태로 근사한다[5, 6].

$$\begin{aligned} \mu_h &\cong \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} h(\mathbf{x}) \prod_{i=1}^n f_{x_i}(x_i) dx_1, \dots, x_n \\ &= \sum_{j_1=1}^m w_{j_1}, \dots, \sum_{j_n=1}^m w_{j_n} h(\mu_1 + \alpha_{j_1}, \dots, \mu_n + \alpha_{j_n}) \\ \sigma_h^2 &\cong \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} (h(\mathbf{x}) - \mu_h)^2 \prod_{i=1}^n f_{x_i}(x_i) dx_1, \dots, dx_n \\ &= \sum_{j_1=1}^m w_{j_1}, \dots, \sum_{j_n=1}^m w_{j_n} [h(\mu_1 + \alpha_{j_1}, \dots, \mu_n + \alpha_{j_n}) - \mu_h]^2 \end{aligned} \quad (2)$$

여기서 m 은 구적점의 개수를, w_{j_n} 은 n 번째 확률밀도함수에 대한 가중치를, μ_i 는 i 번째 확률설계변수 x_i 의 평균을, α_{j_n} 은 n 번째 설계변수에 대한 구적점의 값을 의미한다. 그러나 식(2)을 이용한 성능함수의 통계적 모멘트를 계산하기 위해서는 m^n 에 해당하는 계산이 요구되므로 설계변수의 개수 n 이 클수록 비효율적이다.

수치적분을 수행 시 발생하는 식(2)의 비효율성을 개선하기 위하여 uDRM은 가법분해(decomposition)를 이용하여 n 차원의 성능함수를 n 개의 1차원 함수로 변환한다[2-4]. 식(1)의 성능함수 $h(\mathbf{x})$ 를 단변수를 사용한 가법분해를 적용하면 식(3)과 같다.

$$\begin{aligned} h(\mathbf{x}) &\cong \sum_{i=1}^n h(\mu_1, \dots, \mu_{i-1}, x_i, \mu_{i+1}, \dots, \mu_n) \\ &\quad - (n-1)h(\mu_1, \dots, \mu_n) \end{aligned} \quad (3)$$

따라서 uDRM을 이용하여 성능함수를 표현하면 식(1)의 n 차원 적분이 n 개의 1차원 적분으로 변환되어 성능함수의 통계 모멘트에 요구되는 계산량을 크게 줄일 수 있다. 결국 성능함수 $h(\mathbf{x})$ 의 평균과 분산을 m 개의 구적점을 도입하여 표현하면 식(4)과 같다.

$$\begin{aligned} \mu_h &\cong \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \omega_i^j h(\mu_1, \dots, \mu_{i-1}, x_i^j, \mu_{i+1}, \dots, \mu_n) \\ &\quad - (n-1)h(\mu_1, \dots, \mu_n) \\ \sigma_h^2 &\cong \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \omega_i^j h^2(\mu_1, \dots, x_i^j, \dots, \mu_n) \\ &\quad - (n-1)h^2(\mu_1, \dots, \mu_n) - \mu_h^2 \end{aligned} \quad (4)$$

여기서 ω_i^j 와 x_i^j 는 i 번째 설계변수의 j 번째 가중치와 그에 해당하는 구적점의 위치($x_i + \alpha_j$)를 의미한다. 설계변수에 대한 확률분포 특성이 표준정규분포를 따른다고 가정하면 $m = 3$ 의 경우에 사용되는 가중치와 구적점은 Table 1과 같다[8, 9].

Table I. Weights and quadrature points for a standard normal probability density function.

Quadrature points			Weights		
α_1	α_2	α_3	ω_1	ω_2	ω_3
$-\sqrt{3}$	0	$\sqrt{3}$	1/6	4/6	1/6

가우스(Gauss) 구적법의 원리에 따라 m 개의 구적점이 사용된 uDRM의 계산결과는 성능함수의 $2m - 1$ 차 항까지 정밀도가 보장된다. 또한 성능함수의 통계 모멘트 예측에는 $m \times n + 1$ 번 계산이 요구된다.

2. 성능 모멘트 적분법

전자기 시스템의 성능함수에 대한 통계 모멘트를 예측하기 위하여 입력부인 설계변수 공간에서 수치적분을 수행하는 것은 수치계산의 효율성 측면에서 우수한 기법이라 볼 수 없다. 따라서 본 논문에서 제안한 식(5)의 PMI는 수치계산의 정밀도를 보장하면서 그 효율성을 극대화하기 위하여 시스템의 출력부인 성능함수 공간에서 통계 모멘트를 구한다.

$$\mu_h = \int_{-\infty}^{\infty} hF_H(h)dh \tag{5}$$

$$\sigma_h^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (h - \mu_h)^2 F_H(h)dh$$

여기서 h 는 출력부에서의 성능함수를 $F_H(h)$ 는 h 에 대한 확률 밀도함수를 나타낸다. 식(5)의 성능함수 h 의 통계 모멘트를 m 절점의 수치 구적법을 사용하여 근사화하면 다음 식과 같다.

$$\mu_h \cong \sum_{i=1}^m \omega_i h_i \tag{6}$$

$$\sigma_h^2 \cong \sum_{i=1}^m \omega_i (h_i - \mu_h)^2$$

일반적으로 성능함수의 1차, 2차 통계 모멘트인 평균과 분산의 정밀도를 보장하기 위해서 최소 3개의 구적점이 요구된다. 성능함수의 1차와 2차 값을 구하는데 있어 높은 정확도를 유지하기 위해서 최소 3절점 적분이 필요하다. Table I에

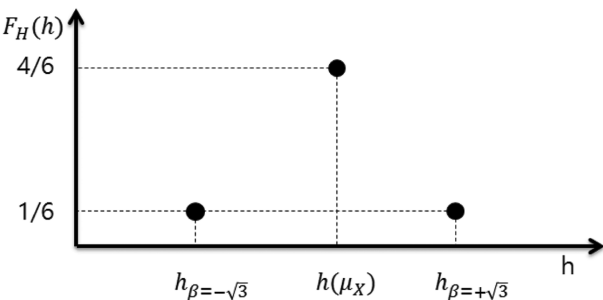


Fig. 2. Three-level numerical integration on the output domain.

제시한 3개의 구적점과 그에 대한 가중치를 이용하여 식(6)을 표현하면 식(7)과 같이 간소화 된다[2].

$$\mu_h \cong \frac{1}{6}h_{\beta=-\sqrt{3}} + \frac{4}{6}h(\mu_x) + \frac{1}{6}h_{\beta=+\sqrt{3}} \tag{7}$$

$$\sigma_h^2 \cong \frac{1}{6}(h_{\beta=-\sqrt{3}} - \mu_h)^2 + \frac{1}{6}(h_{\beta=+\sqrt{3}} - \mu_h)^2$$

여기서 μ_x 는 확률 설계변수 x 의 평균값을, $h_{\beta=\pm\sqrt{3}}$ 은 Fig. 2와 같이 성능함수 공간에서 신뢰도 해석을 통해 얻어지는 신뢰도 지수인 $\beta = \pm\sqrt{3}$ 에 해당하는 성능함수 값을 의미한다. 따라서 신뢰도 해석결과가 제공되면 PMI를 이용한 성능함수의 평균과 분산 예측에는 m 개의 구적점이 사용될 경우, 각각 $m, m - 1$ 번 계산만이 요구된다.

III. 적용 사례

2개의 확률 설계변수를 갖는 간단한 수학예제와 17개의 확률 설계변수를 갖는 스피커 모델을 통하여 제안된 PMI의 수치적인 효율성과 정밀도를 통계 모멘트를 예측하는 기존 기법들과 비교하였다.

1. 수학 예제

식(8)과 같은 수학모델의 확률 설계변수 x 의 변동에 의해 성능함수 h 의 확률분포 특성을 3개의 구적점을 이용한 uDRM과 PMI를 적용하여 예측하였다.

$$h(x) = 1 - \frac{x_1^2 x_2}{20} \tag{8}$$

여기서 확률 변수 x_1, x_2 는 표준정규분포 $N(5, 1)$ 를 따른다고 가정한다. Table II에서 성능함수의 평균과 분산에 대한 정밀도와 두 가지 수치적분기법의 결과를 비교하였다.

성능함수의 평균과 분산을 예측하는 두 가지 수치 적분기법의 정밀도는 5% 이내로 만족스러운 결과를 보인다. 그러나 확률 설계변수가 작은 경우, PMI는 설계공간에서의 수치적분을 위한 추가적인 신뢰도 해석에 6번의 함수계산이 요구되며

Table II. Mean and variance of the mathematical problem obtained from two different numerical methods.

	μ_h	σ_h^2	Function calls
Exact solution	-5.500	8.318	-
uDRM	-5.500	7.936	5
Error (%)	0	4.59	
PMI	-5.650	8.626	$5(6^B)$
Error (%)	2.72	3.71	

*The number in parenthesis means additional function calls for PMI, which requires reliability analysis.

로 uDRM에 비해 비효율적이다.

2. 스피커 모델

일반적으로 스피커는 강자성체인 요크(yoke), 영구자석, 보이스 코일과 진동판으로 구성된다. 전자기적인 진동을 음의 진동으로 변환하기 위해서는 Fig. 3의 공극(x_7)에 균일한 자속밀도를 유지하는 것이 중요한 설계요소로 대두된다[8].

본 예제에서는 요크와 영구자석에 관련된 제작공차가 공극부에서 발생하는 자속밀도 분포에 미치는 변동특성을 예측하였다. 이를 위하여 성능함수 h 는 식(9)와 같이 공극부에 발생하는 ρ 방향 자속밀도 크기의 평균치인 B_0 로 설정하였다.

$$h(\mathbf{x}) = B_0(\mathbf{x}) \tag{9}$$

가공오차를 고려하기 위하여 Fig. 3에 표기된 17개의 설계변수들은 각각 Table III에서 제시된 평균과 표준편차(standard derivation)를 갖는 정규분포함수를 따른다고 가정하였다.

공극부에서 발생하는 평균 자속밀도는 z축 방향의 1.0 T인 영구자석과 요크 투자율의 비선형성을 고려하여 상용 전자기 해석도구인 MagNet을 사용하여 계산하였다[10]. 공극부의 평균 자속밀도의 변동특성은 각각 3개의 구적점을 이용한

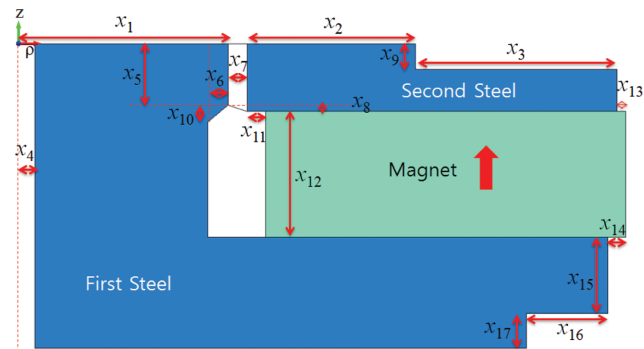


Fig. 3. (Color online) Two-dimensional axisymmetric configuration of a loudspeaker.

Table III. Properties of random design variables.

Variables	Mean (mm)	Std. dev.	Variables	Mean (mm)	Std. dev.
x_1	18.95	0.4	x_{10}	1.52	0.05
x_2	19.43	0.4	x_{11}	1.40	0.05
x_3	18.21	0.4	x_{12}	17.91	0.4
x_4	14.61	0.4	x_{13}	0.81	0.05
x_5	5.54	0.25	x_{14}	16.26	0.4
x_6	1.02	0.05	x_{15}	6.86	0.25
x_7	1.73	0.05	x_{16}	7.37	0.25
x_8	0.58	0.05	x_{17}	3.18	0.25
x_9	2.34	0.25			

Table IV. Mean and variance of the loudspeaker model obtained from three different numerical methods.

	μ_h	σ_h	Function calls
MCS	1.806	0.145	1,700,000
uDRM	1.813	0.133	86
Error (%)	0.39	8.22	
PMI	1.810	0.134	$8(8^R)$
Error (%)	0.22	7.41	

uDRM과 PMI를 적용하여 예측한 후, 비교적 해의 정밀도가 보장된 MCS의 결과와 Table IV에 비교하였다[11]. 성능함수의 평균은 두 가지 수치 적분기법 모두 1% 이내의 정밀도를 보인다. 그러나 성능함수의 표준편차는 MCS의 결과에 비해 7~8% 정도의 오차를 포함하고 있다. 한편, 수치계산의 효율성에 있어서는 제안된 PMI는 성능함수 공간에서의 8번의 함수계산과 더불어 신뢰도 해석에 8번의 함수계산이 필요하여 86번의 함수계산이 요구되는 uDRM에 비해 훨씬 효율적임이 확인되었다.

IV. 결 론

본 연구에서는 실제 전기기기 및 소자의 제작에 포함된 제작공차에 기인한 제품의 성능변동 특성을 효율적으로 예측하기 위하여 성능 모멘트 적분법을 도입하였다. 제안한 기법은 설계변수의 개수가 많을수록 기존 단변수 차원감소법에 비해 계산결과의 정밀도를 유지하면서 그 수치계산의 효율성이 크게 향상됨을 확인하였다. 따라서 제안된 기법은 설계변수의 개수가 많은 실제 공학문제의 적용 시 기존 통계 모멘트 예측기법에 비해 그 효율성이 클 것으로 사료된다.

감사의 글

이 논문은 2014년도 정부(교육과학기술부)의 재원으로 한국연구재단의 지원을 받아 수행된 연구임(No. 2014R1A1A4A01008767).

References

- [1] I. Lee, K. K. Choi, L. Du, and D. Gorsich, IEEE Trans. Magn. **86**, 1550 (2008).
- [2] B. D. Youn, K. K. Choi, and K. Yi, J. Mechanical Design **33**, 185 (2005).
- [3] B. D. Youn, K. K. Choi, and Y. H. Park, J. Mechanical Design **125**, 221 (2003).
- [4] A. Haldar and S. Mahadevan, Probability Reliability and Statistical Methods in Engineering Design, John Wiley & Sons,

- New York (2000).
- [5] D. B. Parkinson, *Quality and Reliability Engineering International* **13**, 97 (1997).
 - [6] G. Taguchi, E. Elsayed, and T. Hsiang, *Quality Engineering in Productions Systems*, New York, McGraw-Hill (1989).
 - [7] Y. Yang, Y. Suh, and J. Lee, *Structural Reliability Engineering*, Seoul National Univ. Press (1999).
 - [8] D. Kim, Ph. D. Thesis, Kyungpook National University, Korea (2014).
 - [9] S. Lee, B. Kang, J. H. Back, and D. Kim, *J. Korean Magn. Soc.* **25**, 203 (2015).
 - [10] *MagNet User's Manual*, Infolytica Corporation, Quebec, Canada (2012).
 - [11] F. G. Guimaraes, D. A. Lowther, and J. A. Ramirez, *IEEE Trans. Magn.* **42**, 1207 (2006).