

大韓造船學會論文集  
 第28卷 第1號 1991年 4月  
 Transactions of the Society of  
 Naval Architects of Korea  
 Vol. 28, No. 1, April 1991

### 3次元 탱크내에서의 液體 슬로싱의 數值 解析

黃宗屹\*, 金一洙\*\*, 설영수\*\*, 李世昌\*\*\*, 全永基\*\*\*

#### Numerical Simulation of Liquid Sloshing in Three-Dimensional Tanks by

J. H. Hwang\*, I. S. Kim\*\*, Y. S. Seol\*\*\*, S. C. Lee\*\*\* and Y. K. Chon\*\*\*

#### 要 約

3次元 탱크내에서의 流體의 슬로싱 現象에 關하여 境界積分法의 패널 方法을 이용한 境界值 問題 解法으로 數值計算하였다. Shinkai는 境界要素의 소오스의 세기가 節點 사이에서 線型變化하도록 計算하였음에 반하여 본 연구에서는 三角形패널마다 一定한 세기의 소오스를 分布시켰다. 各 時間단 계에서의 소오스의 세기는 Green 定理에 의한 第2種 Fredholm積分 方程式을 풀어서 구하며, 時間이 경과함에 따른 수치 계산과 이에따른 誤差의 누적을 피하기 위하여 Adam-Bashforth-Moulton 方法을 이용하였다. 強制調和동요하는 선박의 球形탱크가 部分積載된 경우에 대하여 數值계산한 결과, 自由表面의 높이 計算値는 Shinkai의 결과와 비교한 바 비교적 적은 시간동안에는 잘 일치하고 있음을 확인하였다. 본 수치 계산方法의 精度를 검토하기 위하여 入力 및 出力 에너지가 保存되는 지를 확인하여 보았는데, 시간이 경과되면서 약간의 오차가 있지만 문제의 非線型性, 모델의 패널수가 작음을 감안할때는 인정할 만한 正確度로 판단된다.

#### Abstract

Three-dimensional nonlinear sloshing effects due to tank motions are simulated by solving boundary value problem using the panel method based on boundary integral technique. While Shinkai used boundary elements on which source strengths vary linearly between nodes, the source of constant strength is distributed on each triangular panel in the present study. The source strength at each time step is determined by solving the Fredholm integral equation of the second kind obtained from Green's theorem. To avoid cumulative numerical errors as time elapses, Adam-Bashforth-Moulton method is employed. Numerical examples for the case of partially filled spherical tank on board oscillating in har-

접수일자 : 1990년 10월 8일, 재접수일자 : 1991년 4월 4일

\*정회원, 서울대학교 조선공학과

\*\*학생회원, " "

\*\*\*정회원, (사)한국선급

monic sway mode or pitch mode are solved. The elevation of the free surface is compared with the result by Shinkai and confirmed in good agreement during early time. The input and the output energy are comparatively evaluated to check the overall accuracy of the present numerical scheme. Although some leakage of energy are found as time marches, it is plausible when we take into account nonlinearities of the problem and the number of panels of the model.

## 1. 序 論

액체화물 운반선의 화물탱크의 構造設計에 있어서, 탱크내 유체의 슬로싱은 중요한 문제가 된다. 슬로싱은 탱크의 運動으로 인하여 自由表面을 갖는 유체에 의하여 유발되는 自由表面波유동 현상으로서, 이로 인하여 탱크 벽면에 動的流體力이 유발하게 된다. 따라서 선박이나 항공기의 탱크내 연료의 슬로싱은 제어장치의 작동에 영향을 주므로 슬로싱의 固有振動數에서 外力을 피하는 것이 요구된다. 슬로싱에 의한 동적 유체력에 대한 실험 및 이론적 연구가 계속되고 있으나, 슬로싱 해석은 非線型 자유표면 조건의 취급이 어렵고, 또한 탱크의 기하학적 형상도 복잡하여 동적 유체력을 정확히 예측하기 어렵다.

슬로싱 현상에 대한 비선형 해석은 지난 20년 동안 여러 방법, 즉, 有限差分法 [1], [2], [3], 有限要素法 [4], 境界積分法 [5], [9] 및 境界要素法 [6], [7], [8] 등에 의하여 수치적으로 계산되었다.

본 논문은 panel method를 사용하여 배가 sway 또는 pitch motion 할 때, 3次元 탱크내 유체의 슬로싱 현상에 대하여 數值計算을 하였다. 이를 위해 탱크의 벽면과 유체의 자유표면을 삼각형의 패널들로 근사시킨 후, 각 패널상에 세기가 일정한 소오스를 분포시키고, 시간영역 해법으로 자유표면의 형상을 Simulation 하고, 탱크벽면에 작용하는 動的압력을 구하였다. 계산모델은 위에서 언급한 바와 같이 3次元 球形탱크를 택하였으며, 구형탱크가 sway 및 pitch motion 할때에 탱크내의 유체 유동에 관한 몇가지 수치 예를 보여주었다.

계산상의 편의를 위해 탱크 固定좌표계를 도

입하였으며, 이로 인해 발생하는 상대적 加速度成分을 가상적인 外力 성분으로 취급하여 경계조건에 해당항들을 포함시켰다.

자유표면의 높이에 대한 계산결과를 Shinkai의 결과와 비교하고, 본 數值解析方法의 總계산 精度를 검증하기 위하여 유체영역내에서의 에너지가 보존하는지를 점검하여 보았다. 비교적 초기시간 영역내에서는 계산결과가 대체로 양호함을 확인할 수 있었으나, 시간이 지남에 따라 入力에너지와 出力에너지의 차이가 커지는데 이는 수치계산의 오차가 누적되고 數值計算 모델의 패널수를 작게 택한 이유도 한 원인으로 생각할 수 있다.

## 2. 問題의 定式化

流體로 일부 채워진 3次元 탱크가 6 自由度 運動을 하는 경우의 슬로싱 문제를 고려한다. Fig. 1과 같이 空間固定座標系를  $O-XYZ$ 로, 탱크 固定座標系를  $o-xyz$ 로 정한다.  $XY$ -평면은 정지水面과 平行하고,  $Z$ 축은 그 평면에 수직하게 위로 향한다. 또한  $xy$ -평면은 초기

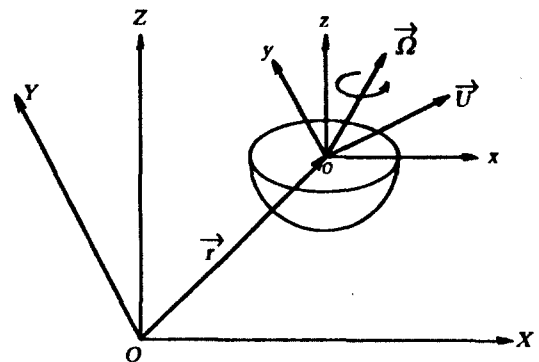


Fig. 1 Coordinate system

상태의 정지수면과 일치하고, z축은 정지수면에 대하여 수직하게 위로 향한다. 탱크가 어느 시간 t에서 固定座標系에 대하여 角速度  $\vec{\Omega}(\dot{\theta}, \dot{\phi}, \dot{\psi})$ 와 一定 方向의 進行速度  $\vec{U}(x, y, z)$ 로 運動하기 시작한다고 하자.

탱크내의 유체는 非粘性, 非壓縮性이며, 유체영역 V에서의 유동을 非回轉性이라 가정하면, 유체영역내에서 속도포텐셜  $\phi$ 가 존재하며,  $\phi$ 는 연속방정식에 의하면 다음과 같이 Laplace방정식을 만족한다.

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \quad \text{in } V \quad (1)$$

또한 자유표면 F상의 動力學的 자유표면 경계조건을 정리하면 다음과 같다.

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = -g\zeta_r - \frac{1}{2} |\nabla \phi|^2 + \nabla \phi \cdot (\vec{\Omega} \times \vec{r}) - \vec{U} \cdot \vec{r} \quad \text{on } F \quad (2)$$

여기서 g는 중력가속도이고  $\zeta_r = \zeta - x \sin \phi + y \sin \theta$ 로서  $\zeta$ 가 自由表面높이일때 流體粒子的 空間固定座標系에서의 초기상태로부터 수직운동 거리고,  $\vec{r}(x, y, z)$ 는 공간좌표계에서의 위치벡터를 나타낸다.

運動學的 自由表面 境界條件은 다음과 같이 表示된다.

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -(\nabla \phi - \vec{\Omega} \times \vec{r}) \cdot \nabla (\zeta - z) \quad \text{on } F \quad (3)$$

한편 탱크벽면 T에서의 境界條件은  $\vec{n}$ 을 유체영역 바깥쪽을 향하는 單位法線벡터라고 할 때 다음과 같다.

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = \vec{n} \cdot (\vec{\Omega} \times \vec{r}) + \vec{U} \cdot \vec{n} \quad \text{on } T \quad (4)$$

또한 다음의 初期條件이 만족되어야 한다.

$$\phi = 0 \quad \text{at } z = 0 \quad \text{and } t = 0 \quad (5)$$

### 3. 數值 解法

問題를 풀기위하여 Panel method를 이용하여 물체의 表面과 자유표면상에 소오스를 분포시키고, 평면 삼각형 패널要素들로 물체 표면을 근사시키어, 소오스 세기에 대한 적분 방정식을 유도할 수 있는데, 이 적분 방정식은 소오스 세기 分布를 나타내는 제 2종 Fredholm

積分方程式이며 삼각형 요소상의 소오스 세기의 값들에 대한 聯立1次方程式으로 대체된다.

이들로부터 각 패널에서의 소오스 세기가 계산되면, 물체 표면상이나 표면에서 떨어진 곳에서의 유체속도를 계산할 수 있다.

境界面 S상의 q점에 위치한 단위 크기의 소오스에 의해서 공간내 p점에 誘起되는 포텐셜을 xyz 좌표로 표시하면  $1/r(p, q)$ 이다. 이때 r(p, q)는 p점과 q점 사이의 거리이다. 따라서 소오스 세기  $\sigma(q)$ 의 분포로 인해 p점에 유기되는 포텐셜은 다음과 같다.

$$\phi(x, y, z) = \iint_S \frac{\sigma(q)}{r(p, q)} dS \quad (6)$$

(6)식에서 被積分함수의 도함수는  $p \rightarrow q$ 일 때, 즉, control point가 表面 S에 접근할 때 singular가 된다. 법선방향 도함수의 極限은 두 방향으로 구성된다. 하나는 단순히 표면상에서 계산된, 즉  $p = q$ 일때이며, 다른 하나는 극한과정으로부터 유도된다. 物理的으로 이 項은  $-2\pi\sigma(p)$ 로 표면 S의 매우 근접한 곳에서 법선방향 도함수에 기여하는 반면에 積分項은 S의 나머지 부분에서의 기여이다.

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} \Big|_s = -2\pi\sigma(p) + \iint_S \frac{\partial}{\partial n} \left[ \frac{1}{r(p, q)} \right] \sigma(q) dS \quad (7)$$

식(6)과 (7)에 있어서 탱크경계요소에서는  $\frac{\partial \phi}{\partial n}$ 을, 自由表面요소에서는  $\phi$ 를 알고 있고, (7)식의 우변의 적분항은 Hess & Smith의 적분방법 [9]을 이용하면 되므로, 식(6)과 (7)은 결국  $\sigma$ 에 대한 N개의 連립선형대수방정식이 된다.

이 방정식을  $\sigma$ 에 대해 일단 풀면 다시 식(6)과 (7)로부터 탱크벽면에서의  $\phi$ 와 自由水面에서의  $\frac{\partial \phi}{\partial n}$ 을 구할 수 있고, 流體의 어느 점에서 速度 性分도 (6)식을 좌표방향으로 미분함으로써 얻을 수 있다. 시간변화에 따른 自由表面의 높이는 (3)식을 이용하여 알아낼 수 있으며, 動的壓力은 베르누이 방정식으로부터 (2)식을 이용하여 계산할 수 있다.

패널 要素들은 각 시간단위마다 연속해서 再배치해야 하며, 속도포텐셜을 비롯한 이 새로

운 값들을 계산해야 하므로, 시간이 지날수록 計算精度와 安定性을 확보할 수 있도록 하는 것이 무엇보다 중요하며, 본 연구에서는 Adam-Bashforth-Moulton의 Time stepping 방법을 채택하였다. 이 방법에서 세번째 time step까지의 값은 4th order Runge-Kutta 방법으로 구하였다.

본 數值 計算 方法의 精確도를 확인하고자, 유체 영역내에서 에너지가 保存되는 지를 점검해 보았다. 모든 경계조건을 만족시켜 주는 과정에서, 패널로의 근사를 통해 오차가 발생하게 된다. 流體 영역내에서 運動에너지와 Potential 에너지의 합이 時間變化率과 탱크 벽면에서의 힘 P와 법선방향 속도의 곱인 일율이 같아야 에너지는 보존되는바, 그 내용은 다음 식으로 표현된다[10].

$$\int_T P \frac{\partial \phi}{\partial n} dS = - \frac{d}{dt} \left[ \int_{T+F} (1/2) \rho \phi \frac{\partial \phi}{\partial n} dS + \int_{T+F} (1/2) \rho g z^2 n_z dS \right] \quad (8)$$

여기서 T는 탱크벽면을, F는 자유표면을 의미한다. 또한 ρ는 밀도, n<sub>z</sub>는 單位法線 벡터의 z成分을 의미한다. 식 (8)은 부록 A에 자세히 유도하여 수록하였다.

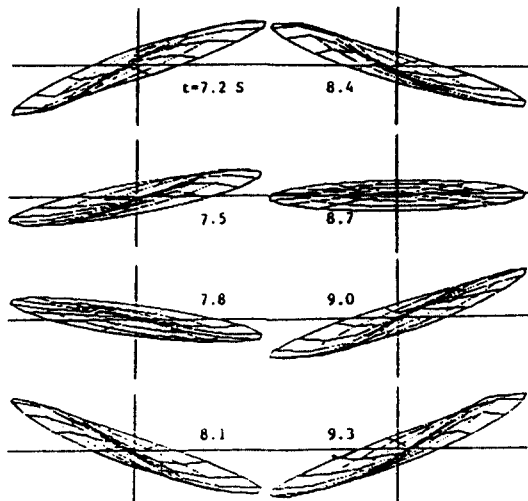
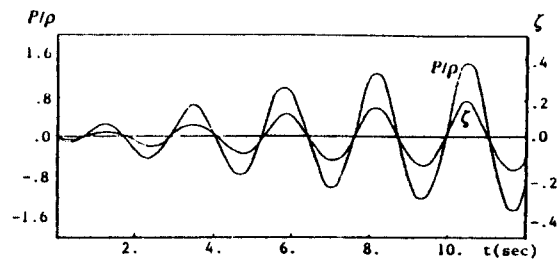


Fig. 2 Typical free surface configurations at sway mode

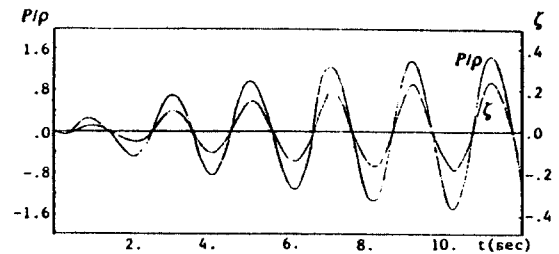
#### 4. 計算 結果 및 考察

液體 슬로싱 현상에 대한 수치계산은 반지름이 2m인 球形탱크에 流體를 水深 1m (25%), 2m (50%), 3m (75%)가 되도록 채우고, 탱크의 中心이 空間固定座標系의 中心으로부터 5m, 10度上方에 있는 경우에 대하여 계산하였다. 또한 強制동요 振幅은 sway 진폭: 0.02m (固有周期: 2.4sec, 2.2sec, 1.8sec), Pitch 角 振幅: 0.5, 1.0度 (固有周期: 2.2sec)이다. 모델境界面은 224個의 三角形패널로 構成되어 있고 계산은 每 0.03秒마다에 대하여 PC-AT級 전산기를 이용하여 數值計算하였다.

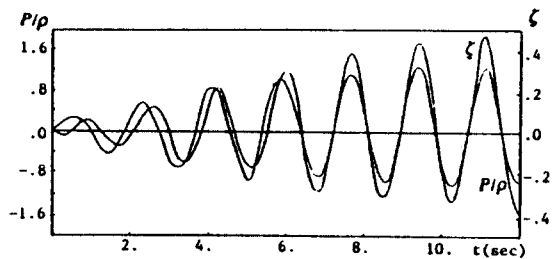
Sway 강제동요의 경우 自由表面形象이 時間



(a) Filling ratio = 25 %, period = 2.4 sec



(b) Filling ratio = 50 %, period = 2.2 sec



(c) Filling ratio = 75 %, period = 1.8 sec

Fig. 3 Free surface elevation and dynamic pressure at sway amplitude = 0.02m

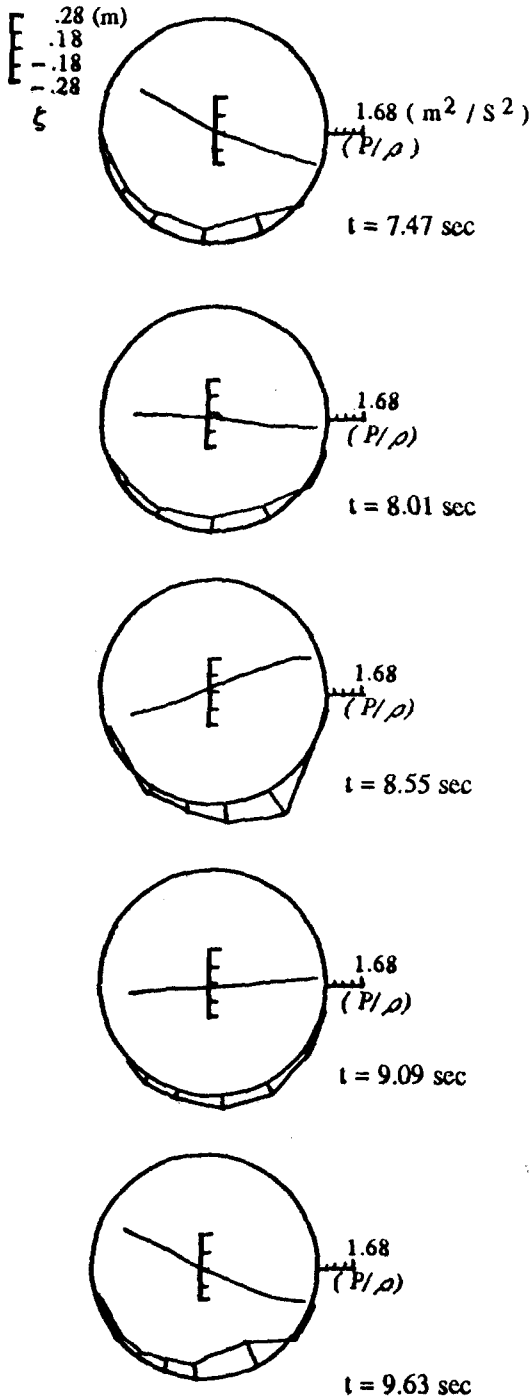


Fig. 4 Free surface elevation and pressure distribution at pitch amplitude = 1°, 50%, T = 2.2 sec

에 따라 3次元으로 변하는 모양의 한 예가 Fig. 2에 잘 나타나 있다. Fig. 3은 각水深에서의自由表面의 수직變位와 動的壓力의變化를 나타내고 있다. Fig. 4는 Pitch 진폭 1度, 적재량 50%인共振點에서 탱크내의自由表面형상과 탱크벽면에 작용하는 압력분포를 대표적인 경과時間에서 각각 2次元적으로 그린 그림이다. Pitch 강제 동요의 경우 진폭 0.5度, 적재량 50%일때  $y = 1.86\text{m}$  위치에서의自由表面의 수직 변위와 탱크벽면과自由表面接點에서의動的壓力이 Fig. 5에 각각 나타나 있는데, 波頂과 골깊이가 같지 않은非線型現象이 보여지고 있다. 또한 Beating현상도 나타나고 있는 바 이는 起振振動數와 固有振動數가 약간 다르기 때문에 두 동요의 간섭현상으로부터 나타나는 것으로 보인다.

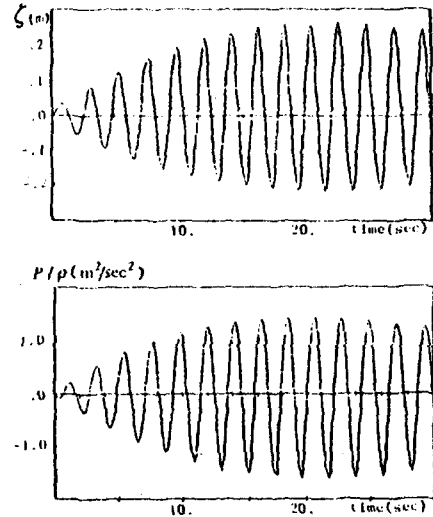


Fig. 5 Free surface elevation and dynamic pressure at pitch amplitude = 0.5°, 50%, T = 2.2 sec

Fig. 6는 Pitch 진폭 1度, 적재량 50%,  $y = 1.86\text{m}$  위치(자유표면 맨끝 패널의 中心點)에서의 자유표면 수직변위의 계산결과를 Shinkai가 위치  $y = 2.0\text{m}$ (탱크벽면과自由表面의接點)에 대해서 계산한 결과와 비교한 그림이다. 그림에서 알 수 있듯이 初期에는 거의 차이가 없으나 시간이 지날수록 Shinkai의 계산결과가

큰 값으로 나타나는데 이는 계산위치와 要素의 계산상의 차이 때문인 것으로 보인다. 실제로 Shinkai는 四角形要素를 사용하여 各節点에서의 動流體力에 대한 값들을 구한 반면에 본 연구에서는 三角形要素를 사용하였고 各要素의 中心에서의 값들을 구하였다.

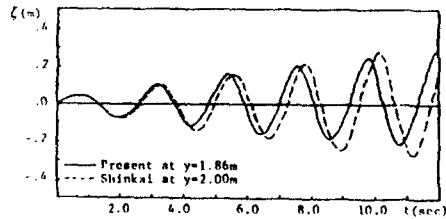


Fig. 6 Free surface elevation at pitch amplitude = 1°, 50%, T = 2.2 sec

한편, 본 數值計算의 精度를 확인하기 위하여 예로서 식(8)을 이용하여 pitch 振幅 1度, 적재량 50% 인 경우의 공진상태에 대하여 入·出力에너지를 계산하여 비교하여 본 그림이 Fig. 7이다. 그림에서 볼 수 있듯이 出力 에너지의 계산결과에 찌그러짐이 나타나는데 이는 自由表面의 法線 벡터 계산시 자유표면을 패넬로 근사하는 과정의 誤差와 수치계산에서 일어나는 오차의 영향으로 판단된다.

또한 시간이 지남에 따라 특히 두번째 周期 때마다 상당한 에너지의 損失이 확인되고 있는 바, 수치계산 오차의 누적으로 인한 것으로 보이며, 問題의 非線型성과 PC 사용에 따른 적용하는 3次元계산 모델의 要素數가 작음을 감안할 때 총에너지 保存의 性向은 비교적 좋은 계산 精度임을 나타내고 있는 것으로 判斷된다.

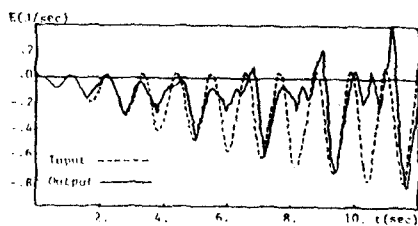


Fig. 7 Time rate of change of input/output energy at pitch amplitude = 1°, 50%, T = 2.2 sec

### 5. 結 論

본 論文에서는 境界積分法을 근거로 한 패넬 방법에 의하여 流體탱크 內에서의 슬로싱 荷重을 계산하는 3次元數值計算方法에 대하여 다루었다. 部分적재된 球形탱크가 sway 및 pitch동요 할때의 自由表面形象과 탱크벽면에 作用하는 動流體壓力을 數值 계산하고 다른 결과와도 비교하여 보았다. 또한 수치 계산 방법의 精度도를 검증하기 위하여 에너지 保存 여부를 검토하였다.

탱크벽면에서의 최대 충격하중은 數值계산모델의 要素크기와 時間增분에 상당히 민감하게 변하며, 따라서 실용상 기술적인 문제점으로 남아있는바, 산업계에서는 설계기술자가 쉽게 이용할수 있는 간략화한 방법을 제시하고 있는 것으로 보고되고 있다. 본연구에서는 계산시간상 문제의 非線型性에도 불구하고 3次元 패넬 요소數를 작게 잡을 수 밖에 없었기 때문에 시간이 지남에 따른 誤差의 누적은 피할 수 없었으며, 현재 개발된 program을 더욱 보완하여 쇄과현상, 점성효과 및 制水 격벽이 있는 임의형상의 탱크가 큰 振幅으로 동요할 때의 슬로싱 현상을 파악할 수 있는 기법의 개발이 필요하다고 생각된다.

### 참 고 문 헌

- [1] Hirt, C. W. and Nichols, B. D., "Volume of Fluid(VOF) Method for the Dynamics of Free Boundaries" *J. of Computational Physics*, Vol. 39, No. 1, 1981.
- [2] Birdges, T. J., "A Numerical Simulation of Large Amplitude Sloshing", *Pro. of the 3rd Int. Conference on Numerical Ship Hydrodynamics*, 1981.
- [3] Hwang, J. H., Lee, S. H. and Lee, S. C., "Computation of Sloshing Loads by Finite Difference Method", *Report of the Research Inst. of Ind. Science*, Vol. 11, No. 1, Seoul National Univ., Dec. 1988.

- [4] Ramaswamy, B., Kawahara, M. and Nakayama, T., "Lagrangian Finite Element Method for the Analysis of Two-Dimensional Sloshing Problems" Int. Journal for Numerical Methods in Fluids, Vol. 6, No. 9, 1986
- [5] Faltinsen, O. M., "A Numerical Nonlinear Method of Sloshing in Tanks with Two-Dimensional Flow" Journal of Ship Research, Vol. 22, No. 3, 1978
- [6] Nakayama, T. and Washizu, K., "The Boundary Element Method Applied to the Analysis of Two-dimensional Non-linear Sloshing Problems" Int. Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 17, 1981
- [7] Shinkai, A., Nozu, Y., Yamaguchi, K. and Fuguda, J., "Numerical Analysis of Three Dimensional Sloshing Problems (Continued)" Trans. of West Japan Soc. of Naval Architects of Japan, Vol. 166, p. 355-362, 1989
- [8] Iseki, T., Shinkai, A. and Nakatake, k., "Boundary Element Analysis of 3-Dimensional Sloshing Problems by Using Cubic Spline Element" Trans. of the Society of Naval Architects of Japan, Vol. 166, p. 355-362, 1989.
- [9] Hess, J. L. and Smith, A. M. O., "Calculation of Potential Flow about Arbitrary Three-Dimensional Bodies" Douglas Aircraft Co., Report No. ES40622, 1962
- [10] Dommermuth, D. G. and Yue, D. K. P., "Numerical Simulations of Nonlinear Axisymmetric Flows with a Free Surface" J. Fluid Mech., Vol. 178, p. 195-219, 1987.

#### 부록 : 數值 計算의 精度 檢討

유체 영역내의 波에너지,  $E$ 는 다음과 같다.

$$E = \rho \int_V (1/2 V^2 + g z) dV \quad (A-1)$$

(A-1)식의 시간변화율은 Transport theorem에 의하여,

$$\frac{dE}{dt} = \rho \int_V \frac{\partial}{\partial t} (1/2 V^2 + g z) dV + \int_S (1/2 V^2 + g z) U_n dS \quad (A-2)$$

이므로 우변의 첫번째 항의 피적분함수는,

$$\frac{\partial}{\partial t} [1/2 V^2] = \frac{\partial}{\partial t} [1/2 \nabla \phi \nabla \phi] = \nabla \cdot \left[ \frac{\partial \phi}{\partial t} \nabla \phi \right] - \frac{\partial \phi}{\partial t} \nabla^2 \phi \quad (A-3)$$

유체영역내에서 Laplace 방정식을 만족하므로, (A-3)식의 右邊의 두번째 항은 사라지고, 따라서 (A-2)식은 divergence theorem에 의하여,

$$\frac{dE}{dt} = \rho \int_S \left[ \frac{\partial \phi}{\partial t} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial n} + (1/2 V^2 + g z) U_n \right] dS \quad (A-4)$$

(A-4)식에 Bernoulli's 방정식을 대입하면

$$\frac{dE}{dt} = \rho \int_S \left[ \frac{\partial \phi}{\partial t} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial n} - \left( \frac{P - P_a}{\rho} + \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) U_n \right] dS \quad (A-5)$$

(A-5)식을 공간고정 좌표계에서 보면, 물체 표면상에서는  $U_n = \phi_n$ 이고, 자유표면상에서는  $U_n = \phi_n$ ,  $P = P_a$ 이며, matching boundary에서는  $U_n = 0$ 이므로,

$$\frac{dE}{dt} = \rho \int_M \frac{\partial \phi}{\partial t} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial n} dS - \rho \int_B \frac{P}{\rho} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial n} dS \quad (A-6)$$

Divergence theorem에 의하여 (A-1)식은

$$E = \int_{BUP} 1/2 \phi \frac{\partial \phi}{\partial n} dS + \int_{BUP} 1/2 \rho g z^2 n_z dS \quad (A-7)$$

(A-7)식을 (A-6)식에 대입하여 정리하면,

$$\rho \int_M \frac{\partial \phi}{\partial t} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial n} dS - \rho \int_B \frac{P}{\rho} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial n} dS = \frac{d}{dt} \left[ \int_{BUP} 1/2 \phi \frac{\partial \phi}{\partial n} dS + \int_{BUP} 1/2 \rho g z^2 n_z dS \right] \quad (A-8)$$

본 계산에서는 Matching boundary가 없으므로 (A-8)식에서 다음 결과를 얻는다.

$$\int_B \frac{P}{\rho} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial n} dS = - \frac{d}{dt} \left[ \int_{BUP} 1/2 \phi \frac{\partial \phi}{\partial n} dS + \int_{BUP} 1/2 g z^2 n_z dS \right] \quad (A-9)$$