

비원형기어에서의 압력각과 잇수비 및 곡률반경의 적정범위에 관한 연구

최 상 훈*

A Study on the Proper Scope for Pressure Angle, Ratio of Tooth Number & Radius of Curvature in Non-Circular Gears.

SANG-HOON CHOI*

ABSTRACT

Non -circular gear has a good velocity ratio in high speed and heavy load without any slip, moreover, it can transmit various motion, using simpler structure than link and cam, automation mechainism.

In case of designing and manufacturing non - circular gear , I suggest one of references in applying non - circular gear to industrial plant, and suitable range of application by pressure angle curvature and angle ratio

Key Words: Non-circular gear(비원형기어), Pressure angle(압력각), Number of tooth(잇수), Distance between axes(중심거리), curvature(곡률), Radius of curvature(곡률반경), Pitch curve(피치곡선)

Nomenclature

a, c, d, e : 기어의 명칭
 b : 기어사이의 중심 거리
 m : 모듈
 n, n' : 1쌍의 원형 기어의 잇수비(齒數比)
 O_b : 피삭기어의 축심
 r : 피치 동경
 r_{cc} : 피니언 커터의 피치원 반경
 r_0 : 피치원 반경
 r_p, r_q : 비원형 기어 p, q 등의 피치 곡선의 동경

S_θ : θ 에 대한 피치 곡선의 길이 (주장)
 x : Cutter 이동량
 y : 테이블의 전·후 이동량
 α : 압력각
 α_b : 맞물림 압력각
 α_{cc} : 공구 압력각
 α_0 : 기준 압력각
 α_p : 비원형 기어 피치 곡선의 압력각
 σ : 비원형 기어 피치 곡선의 절선각
 ρ : 곡률 반경
 θ : 비원형기어 피치곡선의 변위각

* 건국대학교 기계설계학과

- ⊖ : 입력축 회전각
- ⊖_c : 테이블의 회전각
- ⊖_H : 출력 1주기에 대한 입력축의 회전각
- Φ : 출력축의 회전각
- Φ_H : 입력 1주기에 대한 출력축의 변위각

1. 서론

산업이 발달되어감에따라 기계의 운동이나 동력의 전달에서 보다 정밀하고 복잡하면서도 정확한 운동의 전달이 크게 요구되고 있는 실정이다. 이에 부응하여 각종 기구의 소형화·고속화·고정도화⁽¹⁾가 요구되고 있다. 예로서 간단한 기구이면서도 복잡하고 유연한 운동을 얻을 수 있으며, 동특성이 뛰어난 것으로서 부등속 운동을 하는 비원형기어를 사용한 전달 기구를 들 수 있다. 山崎陸⁽²⁾이 제시한 부등속 회전 기구의 장점은 캠에 비해 미끄럼이 적기 때문에 복잡한 운동을 확실하게 고속·고하중으로 전달할 수 있고, 링크에 비해 간단하고 간결한 설계가 가능하며 구성도 용이하게 되며 자동차 기구의 설계상 필요한 움직임을 기어의 형상에 반영시킬 수 있기 때문에 메커니즘이 간단하게 된다.

비원형기어에 대한 연구는 모리타(森田)⁽³⁾와 가사하라(笠原)⁽⁴⁾⁻⁽⁶⁾는 근사 타원 기어를 제안했지만 이것은 변위 곡선의 개선을 위해서가 아니고 절삭의 효율화를 위해서였다. 1930년대 후반에 Golber⁽⁷⁾가 원하는속도 곡선으로부터 비원형기어의 피치 곡선의 동경 및 주장의 산출식을 유도하였다. Peyrebrune⁽⁸⁾도 종이 보내는 장치에 간차회전운동(일시 정지했다가 다시 회전하는 운동) 기구를 채용하였다. 이상에서처럼 종래의 비원형기어 기구는 극히 일부만이 실현되어 있으며⁽⁹⁾, 비원형기어 자체에 대한 기구학적 조건의 해명도 불충분하다. 한편 국내에서는 이 분야의 관련 연구는 찾아보기가 어렵고, 1994년 고운호⁽¹⁰⁾의 "비원형 타원계 엽형 기어의 이심률 변화에 따른 특성에 따른 연구"와 1995년 유명섭⁽¹¹⁾의 "이심률 변화에 따른 타원계 엽형 기어의 진동 특성에 따른 연구"에서 비원형기어에 대한 연구를 찾아볼 수 있다. 본연구에서는 비원형기어를 이용한 부등속 회전 기구의 입력력 특성을 제시하고, 부등속 회전 기구에 사용된 비원형기어의 설계시 고려해야할 압력각, 모듈, 잇수의 비, 중심거리, 곡률 등 제반 조건을 고려하고 피치 곡선의 형상 및 세가지 유형의 기어 제원을 설계하고, 압력각과 잇수비 및 곡률반경의 적정범위를 규명하였다.

2. 부등속 회전기구의 변위 해석

2-1. 비원형기어의 연속회전 조건

한쌍의 비원형기어 p와 q가 맞물려있는 상태를 Fig. 2-1. 에 표시하였다. 중심 거리가 일정하다면, 기어 p와q의 피치 동경 p및 q의 합은 항상 일정하기 때문에 이것들의 동경과 각기어의 회전각의 관계는 Fig 2-2. 처럼 된다. 이것을 식으로 나타내면

$$qS_p = pS_q \quad \therefore \frac{q}{p} = \frac{S_q}{S_p} \quad (2-1)$$

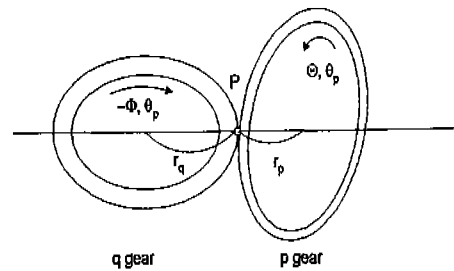


Fig.2-1. pair of gear of irregular shape

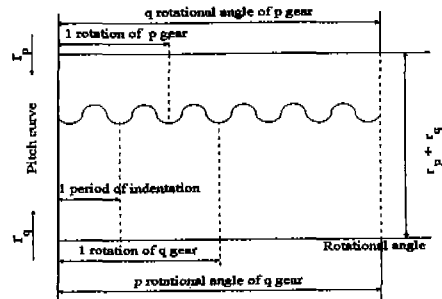


Fig.2-2. Continuous rotation condition of irregular gear

2-2. 변위 곡선

각기어의 변위각을 각각 θ_p 와 θ_q 로 한다면 입출력회전각 \ominus 와 Φ 의 관계는 $\theta_p = \ominus, \theta_q$ 이므로 각기어의 피치 동경은 다음식과 같다.

$$r_p = -\frac{d\Phi / d\ominus}{1 - (d\Phi / d\ominus)} \quad (2-2)$$

$$r_q = \frac{1}{1 - (d\Phi / d\ominus)} b$$

2-3. 부등속 유성기어기구의 형식

유성기어기구에 비원형기어를 도입한 기구를 부등속유성기어기구라고 하는데 본연구에서는 외기어만으로 된 기어를 I형 기구라 하고 또 두쌍의 기어중에서 한쌍을 외 및 내기어의 조합으로 한 경우를 II형 기구라 하고, 두쌍의 외 및 내기어의 조합으로 한 경우를 III형 기구라 한다. 이것들의 기구를 Fig. 2-3.에 나타냈다. .

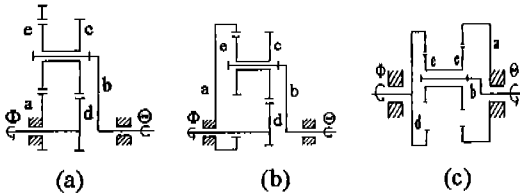


Fig 2-3. The type of planetary gear mechanism

2-4. 출력축의 운동주기 및 진행각

所要의 출력 변위 곡선 $\Phi = \Phi(\Theta)$ 를 주어 각 기어의 피치 곡선을 얻기위해서 식 (2-2)를 변형하면

$$\begin{cases} r_c = \frac{1 - d\Phi/d\Theta}{r_a/r_e + 1 - d\Phi/d\Theta} b \\ r_d = \frac{r_a/r_e}{r_a/r_e + 1 - d\Phi/d\Theta} b \end{cases} \quad (2-3)$$

$$\begin{cases} r_a = \frac{1 - d\Phi/d\Theta}{r_c/r_d + 1 - d\Phi/d\Theta} b \\ r_e = \frac{r_c/r_d}{r_c/r_d + 1 - d\Phi/d\Theta} b \end{cases} \quad (2-4)$$

을 얻는다. 변위특성을 구한 결과는 Tabel 2-1.과 같다.

3. 설계 조건의 결정

비원형기어의 피치곡선, 이의 간섭, 언더컷등은 비원형기어의 피치의 곡선의 각점에 있어서의 곡률원을 피치원으로 하는 상당 원형기어를 고려한다.⁽⁴⁾

3-1. 비원형기어 설계에 있어서의 한정조건

3-1-1. 피치곡선에서의 한정조건

1) 피치 곡선⁽⁵⁾⁽⁶⁾

i) 각기어의 피치곡선은 폐곡선이어야 한다.

Table 2-1. Displacement quality of planetary gear trains with Inconstant velocity

Driving axis	Angle of displacement for distance(b) between axes Θ		
Driven axis	Angle of displacement for sun gear(d) Φ		
Circular gear	a, e	c, d	
Ratio of teeth number for circular gear	$n = r_d/r_e$	$n' = r_c/r_a$	
Non-circular gear	Pitch curve	$r_c = \frac{1 - d\Phi/d\Theta}{n + 1 - d\Phi/d\Theta} b$ $r_d = \frac{n}{n + 1 - d\Phi/d\Theta} b$	$r_a = \frac{1 - d\Phi/d\Theta}{n' + 1 - d\Phi/d\Theta} b$ $r_e = \frac{n'}{n' + 1 - d\Phi/d\Theta} b$
	Angle of displacement	$\theta_c = -n\Phi$ $\theta_d = \Phi - \Phi$	$\theta_a = \Phi$ $\theta_e = \frac{1}{n'}(\Phi - \Phi)$
Period (Θ H)	$\frac{2\pi}{icn}$	$\frac{2\pi}{ja}$	
Angle of displacement for driven axis	$\frac{2\pi}{icdn}(d-cn)$	$\frac{2\pi}{jca}(c-an')$	
Quality	$n = \frac{c}{d}$: Tremble	$n' = \frac{e}{a}$: Tremble	
	$n \neq \frac{c}{d}$: Rotation	$n' \neq \frac{e}{a}$: Rotation	
	$n = \frac{r_c}{r_d}$: Temporal rest	$n' = \frac{r_e}{r_a}$: Temporal rest	

Annotation : Change a sign n, r_e for II type equipment and c, e, n, n', r_c, r_e for III type equipment..

$$\begin{cases} r(\Theta) = r(\Theta + 2n\pi), n = 1, 2, 3, \dots \\ (d\Phi/d\Theta) = (d\Phi/d\Theta)_{\Theta + \frac{2\pi}{n}} \end{cases} \quad (3-1)$$

ii) 피치곡선의 접선각 σ 는 연속해서 변화하므로 Fig 3-1.을 참조하여 σ 는 다음식에 주어진다.

$$\sigma = \tan^{-1}\left(r \frac{d\theta}{dr}\right) \quad (3-2)$$

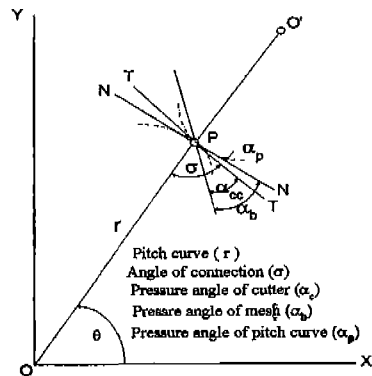


Fig 3-1. Angle of pitch curve

iii) 피치곡선의 동경(動徑)은 양(+)이어야 한다.

$$r > 0 \quad (3-3)$$

iv) 피치곡선의 주장을 S , 잇수(齒數)를 Z , 모듈을 m , 중심거리의 길이를 b 라 하면

$$m\pi Z = Sb \quad (3-4)$$

v) 피치 곡선의 곡률반경⁽⁵⁾

ρ (ρ_c : 외기어, ρ_d : 내기어)는 pinion cutter를 이용해 절삭을 하는 경우에는 곡선의凹부에 있어서는 cutter의 피치원반경보다 커야한다. $|\rho_c| > r_{cc}$, $\rho_d > r_{cc}$ 이다.

$$\rho = \frac{\{r^2 + (dr/d\theta)^2\}^{3/2}}{r^2 + 2(dr/d\theta)^2 - r(d^2r/d\theta^2)} \quad (3-5)$$

$$r^2 + 2(dr/d\theta)^2 - r(d^2r/d\theta^2) > 0 \quad (3-6)$$

vi) 맞물려 돌아가는 비원형기어의 피치 곡선은 Fig. 3-1.과 같다. 식(3-2)로부터

$$\alpha_p = \left| \frac{\pi}{2} - \sigma \right| = \tan^{-1} \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{dr}{d\theta} \right) \quad (3-7)$$

맞물림 압력각 α_b 는 다음식에 주어진다.

$$\alpha_b = \alpha_{cc} + \alpha_p \quad (3-8)$$

3-1-2. 이의 간섭에서의 한정 조건

비원형내기어의 곡률반경 ρ_d 와 잇수 Z_d 가 아래의 각 조건식을 만족한다면 간섭은 생기지 않는다. 여기서 α_0 는 기준압력각을 나타낸다.

i) 인벌류우트 간섭

$$Z_d \geq \frac{Z_c^2 \sin^2 \alpha_0 - 4}{2Z_c \sin^2 \alpha_0 - 4} \quad (3-9)$$

$$\rho_d \geq \frac{r_{cc}^2 \sin^2 \alpha_0 - m^2}{2r_{cc}^2 \sin^2 \alpha_0 - 2m} \quad (3-10)$$

ii) 트로코이드 간섭

근사식(7)을 이용해서 나타낸다.

$$\begin{cases} Z_d - Z_c \geq \frac{h_{kc} + h_{kd}}{m} \operatorname{cosec}^2 \delta \\ \rho_d - r_{cc} \geq \left(\frac{h_{kc} + h_{kd}}{2} \right) \operatorname{cosec}^2 \delta \end{cases} \quad (3-11)$$

iii) 트리밍

$$\begin{cases} Z_d - Z_c \geq \frac{2(h_{kc} + h_{kd})}{m} \operatorname{cosec}^2 \delta \\ \rho_d - r_{cc} \geq (h_{kc} + h_{kd}) \operatorname{cosec}^2 \delta \end{cases} \quad (3-12)$$

iv) 언더컷

$$\rho \sin^2 \alpha_{cc} \geq m$$

$$(r + m) \leq (r \sin \alpha)^2 + r_{cc}^2 + 2r_{cc} \sin^2 \alpha \quad (3-13)$$

$$Z_{cc} \geq \frac{4 - Z^2 \sin^2 \alpha_{cc}}{2Z \sin^2 \alpha_{cc} - 4} \quad (3-14)$$

(단, Z_{cc} : 공구잇수, Z : 피삭기어의 잇수)

v) 내(內)기어의 조건

$$\rho_d - m \geq \rho_d \cos \alpha_0$$

$$\rho_d \geq \frac{m}{1 - \cos \alpha_0} \quad (3-15)$$

$$Z_d \geq \frac{2}{1 - \cos \alpha_0}$$

3-2. 비원형기어 절삭시의 제약 조건

비원형 외기어는 hob 또는 rack cutter에 의해 절삭이 가능하며, 내기어는 pinion cutter에 의해 절삭한다.

3-2-1. 피니언 cutter에 의한 절삭

i) 비원형내기어의 절삭 조건⁽¹²⁾⁽¹³⁾

Fig. 3-2.는 피삭재가 각도 φ 회전했을 때의 피삭재와 cutter의 상대 위치 관계를 나타낸다. 피삭재의 회전각 φ 에 있어서의 축중심 O_d 의 좌표 (ξ_d, η_d)는 다음식에 나타내어진다.

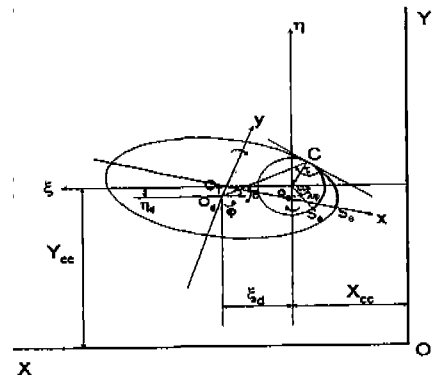


Fig. 3-2. Cutting Condition of Internal Gear

$$\begin{cases} \xi_d = r_d \cdot \cos(\theta - \varphi) - r_{cc} \cdot \cos\left(\frac{S_\theta}{r_{cc}} - \lambda\varphi\right) \\ \eta_d = -r_d \cdot \sin(\theta - \varphi) + r_{cc} \cdot \sin\left(\frac{S_\theta}{r_{cc}} - \lambda\varphi\right) \end{cases} \quad (3-16)$$

단 $\varphi = \frac{1}{\lambda - 1} \left(-\theta - \tau + \frac{S_\theta}{r_{cc}} + \frac{\pi}{2} \right)$,
 $\tau = \cos^{-1} \left(\frac{dr_d}{d\theta \cdot r_d} \right)$

X,Y방향의 캠윤곽은 xy좌표계에서 다음과 같이 나타내진다.

a) X방향 캠

$$\begin{aligned} x_d &= X_d \cos\varphi - \frac{d\xi_d}{d\varphi} \sin\varphi \\ y_d &= X_d \sin\varphi + \frac{d\xi_d}{d\varphi} \cos\varphi \end{aligned} \quad (3-17)$$

b) y방향 캠

$$\begin{aligned} x_d &= Y_d \sin\varphi - \frac{d\eta_d}{d\varphi} \cos\varphi \\ y_d &= -Y_d \sin\varphi + \frac{d\eta_d}{d\varphi} \sin\varphi \end{aligned} \quad (3-18)$$

ii) 비원형외기어의 절삭 조건

외기어의 절삭에 있어서는 피삭재가 각도 φ 로 회전한 경우의 피삭재와 cutter와의 상대 위치관계는 Fig.3-3에 나타난 것처럼 된다. O_c 의 좌표 (ξ_c, η_c) 는 다음 식으로 나타낸다.

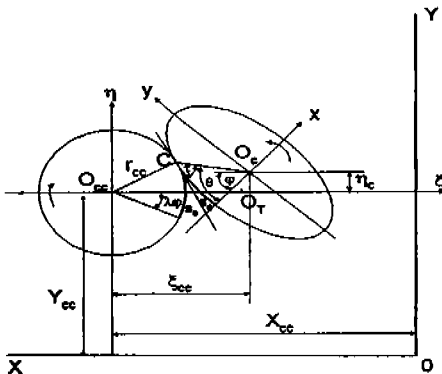


Fig. 3-3. Cutting condition of external gear

$$\xi_c = r_c \cos(\theta - \varphi) + r_{cc} \cos\left(\frac{S_\theta}{r_{cc}} - \lambda\varphi\right) \quad (3-19)$$

$$\eta_c = -r_c \sin(\varphi - \theta) + r_{cc} \sin\left(\frac{S_\theta}{r_{cc}} - \lambda\varphi\right)$$

단, $\varphi = \frac{1}{1 + \lambda} \left(\theta - \tau + \frac{S_\theta}{r_{cc}} - \frac{\pi}{2} \right)$, $\tau = \cos^{-1} \left(\frac{dr_c}{d\theta \cdot r_c} \right)$

내기어의 경우와 마찬가지로 하면 다음 식이 얻어진다.

$$X_c = X_{cc} - \xi_c \quad (3-20)$$

$$Y_c = Y_{cc} + \eta_c$$

a) X방향 캠

$$\begin{aligned} x_c &= X_c \cos\varphi + \frac{d\xi_c}{d\varphi} \sin\varphi \\ y_c &= -X_c \sin\varphi + \frac{d\xi_c}{d\varphi} \cos\varphi \end{aligned} \quad (3-21)$$

b) Y방향 캠

$$\begin{aligned} x_c &= -Y_c \sin\varphi - \frac{d\eta_c}{d\varphi} \cos\varphi \\ y_c &= -Y_c \cos\varphi + \frac{d\eta_c}{d\varphi} \sin\varphi \end{aligned} \quad (3-22)$$

4. 결과 및 고찰

한 대의 외 및 내치차를 이용한 II형기구는 그 변위곡선이 단조증가를 하므로 부등속운동을 전달하는 것이 불가능하다. 그러므로 외치차만으로 구성되어 요동, 요동회전, 간차회전운동을 하는 I-1, I-2형과 내치차 2쌍으로 구성하여 간차회전운동이 가능한 III-1형의 비원형기어를 설계하였다.

4-1. I-1형기구

4-1-1. 변위 곡선

변위 곡선에 싸이클로이드 곡선을 이용할 경우, 간차회전운동에 있어서의 정지 및 변위 기간의 변위 곡선의 식은 다음과 같이 된다.

$$\begin{cases} 0 \leq \theta \leq \theta_s \text{ 일때: } \Phi = 0 \\ \theta_s \leq \theta \leq \theta_H \text{ (} = \frac{2\pi}{n} \text{)} \text{ 일때:} \end{cases} \quad (4-1)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \Phi &= -\frac{2\pi(n-1)}{2\pi-n\Theta_s} \Theta - \Theta_s - \frac{2\pi-n\Theta_s}{2n\pi} \sin \frac{2n\pi}{2\pi-n\Theta_s} \\ &\times (\Theta - \Theta_s) \end{aligned} \right. \quad (4-1)$$

식 (4-1)로부터 변위곡선의 관계식은 다음과 같고 Fig. 4-1.에 나타냈다.

$$\begin{aligned} \Phi_H &= \frac{\pi}{4} \\ \Phi &= \frac{2}{9} \left(\Theta - \frac{9}{16} \sin \frac{16}{9} \Theta \right), \quad (0 \leq \Theta \leq \frac{9}{8} \pi) \quad (4-2) \\ \Phi &= \frac{\pi}{4}, \quad \left(\frac{9}{8} \pi \leq \Theta \leq \frac{9}{4} \pi \right) \end{aligned}$$

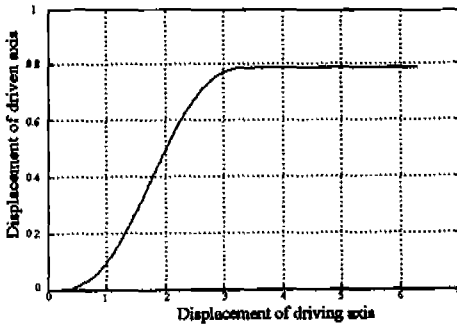


Fig.4-1. Displacement curve of I-1type

4-1-2. 피치 곡선

(1) 피치 곡선의 계산

변위 곡선은 $(9\pi/16 (1.7671), \pi/8 (0.3927))$ 에서 접대칭이므로 변위곡선의 원점이 $(9\pi/16, \pi/8)$ 가 되도록 평행 이동하고, 피치 곡선의 식을 구했다.

$$\left\{ \begin{aligned} &-\frac{9}{16} \pi \leq \Theta \leq \frac{9}{16} \pi \text{ 일때} \\ r_c &= \frac{7-2\cos(16/9 \Theta)}{15-2\cos(16/9 \Theta)} b, \quad \theta_c = \theta_e = -\frac{8}{9} \Theta \\ r_d &= \frac{8}{15-2\cos(16/9 \Theta)} b \\ \theta_d &= \frac{7}{9} \Theta - \frac{1}{8} \sin \frac{16}{9} \Theta \end{aligned} \right. \quad (4-3)$$

$$\left\{ \begin{aligned} &\frac{9}{16} \pi \leq \Theta \leq \frac{27}{16} \pi \text{ 일때} \\ r_c &= \frac{9}{17} b, \quad \theta_c = \theta_e = -\frac{8}{9} \Theta \\ r_d &= \frac{8}{17} b, \quad \theta_d = \Theta - \frac{1}{8} \pi \end{aligned} \right. \quad (4-4)$$

식(3-7)과 식(4-3)으로부터 피치 곡선의 최대 압력각은 18.5° 이다. Fig. 4-2., 4-3.에 설계된 피치곡선을 나타내었다.

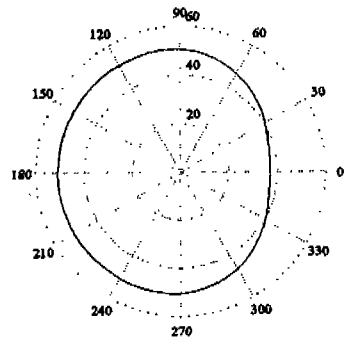


Fig.4-2. Pitch curve of I-1type (c gear)

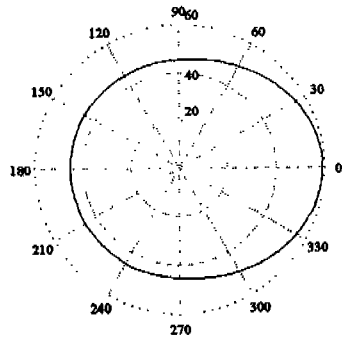


Fig.4-3. Pitch curve of I-1type (d gear)

4-1-3. 기어의 체원

비원형기어의 주장을 다음 식에서 구한다.

$$s_1 = \frac{16}{9} \times \int_0^{\frac{9}{16}\pi} \sqrt{\frac{7-2\cos(16/9 \Theta)}{15-2\cos(16/9 \Theta)} + \frac{1024\sin^2(16/9 \Theta)}{15-2\cos(16/9 \Theta)^4}} d\Theta \quad (4-5)$$

식 (4-5)를 계산하면 S_1 은 1.4870이다.

또 원호부의 주장

$$S_2 = r_c \theta_c = \frac{9}{17} \times \frac{8}{9} \Theta \quad \text{이므로}$$

$\Theta = \frac{9}{8} \pi$ 에서 구한다. 그러므로 전주장

(S/b):

$$S/b = S_1 + S_2 = 1.4870 + 1.16632 = 3.1502$$

이다. 단, 중심거리 b 는 1로 계산한다. 기어제원을 Tabel 4-1.에 나타낸다.

Table 4-1. The specification of gear for I-1 type

	e gear		a gear	
	circular gear	module		1
pressure angle		20°		
number of tooth		77	76	
radius of pitch curve		77mm	76mm	
distance between axes		76.7896mm		
addendum modification coefficient		0	0.5792	
Non circular gear	circumference of pitch curve	S/b = 3.1502		
	module	1		
	number of tooth	77		
	width of tooth	10mm		
distance between axes	76.7896mm			

4-2. I-2형 기어

4-2-1. 변위 곡선

1주기 동안의 변위각과 요동각이 같고 두 개의 사이클로이드 곡선을 1/2주기에서 연결한 변위 곡선은 다음 식에 주어진다.

$$\begin{cases} \Phi = \frac{2\Phi_H}{\pi} (\Theta - \frac{1}{2} \sin 2\Theta) & (0 \leq \Theta \leq \pi) \\ \Phi = 3\Phi_H - \frac{\Phi_H}{\pi} (\Theta - \frac{1}{2} \sin 2\Theta) & (\pi \leq \Theta \leq 2\pi) \end{cases} \quad (4-6)$$

원형 기어 c 와 d 의 피치원 반경의 비 n' 는

$$n' = 1 - \frac{\Phi_H}{2\pi} \quad (4-7)$$

이다. 비원형 기어 a 와 e 의 피치 곡선이凹부를 갖지 않는 조건은 식 (3-6)에서 주어진다.

$$\begin{cases} n'(\Phi' - 1)^3(n' + 1 - \Phi') + (\Phi'')^2 - n'^3 \Phi'''(\Phi - 1) < 0 \\ (1 - \Phi')^2(n' + 1 - \Phi') + 2n'(\Phi'')^2 + n\Phi'''(1 - \Phi') > 0 \end{cases} \quad (4-8)$$

또한 변위 곡선과 피치 곡선의 관계식으로부터

$$\begin{cases} \frac{dr_a}{d\Theta} = -\frac{n'\Phi''}{(n'+1-\Phi')^2} \\ \frac{d^2r_a}{d\Theta^2} = -\frac{n'\{(n'+1-\Phi')\Phi'' + 2(\Phi'')^2\}}{(n'+1-\Phi')^3} \end{cases} \quad (4-9)$$

Θ_H 의 값으로써 $\pi/12$ 를 구하고 변위곡선의 식을 구하면 다음 식을 얻는다.

$$\begin{cases} \Phi = \frac{\Theta}{6} - \frac{1}{12} \sin 2\Theta & (0 \leq \Theta \leq \pi) \\ \Phi = \frac{\pi}{4} - \frac{\Theta}{12} + \frac{1}{24} \sin 2\Theta & (\pi \leq \Theta \leq 2\pi) \end{cases} \quad (4-10)$$

변위 곡선을 Fig. 4-4.에 나타냈다.

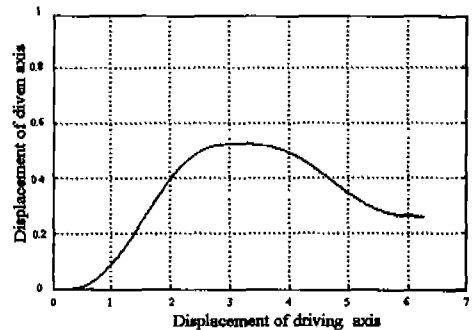


Fig. 4-4. Displacement curve of I-2 type

4-2-2. 피치 곡선

여기서 출력 변위각 Θ_H 의 값이 $\pi/12$ 인 것으로부터 원형 기어 c 와 d 의 피치원 반경의 비 n' 는 식 (4-7)로부터 23 : 24 가 된다.

피치 곡선을 나타내는 식은

$$-\frac{\pi}{2} \leq \Theta \leq \frac{\pi}{2} \quad \text{일때}$$

$$\begin{cases} r_e = \frac{23}{43 - 4\cos 2\Theta} b, \theta_e = -\frac{20}{23}\Theta + \frac{2}{23}\sin 2\Theta \\ r_a = \frac{20 - 4\cos 2\Theta}{43 - 4\cos 2\Theta} b, \theta_a = \Theta \end{cases} \quad (4-11)$$

$\frac{\pi}{2} \leq \Theta \leq \frac{3\pi}{2}$ 일때

$$\begin{cases} r_e = \frac{23}{43 - 4\cos 2\Theta} b, \theta_e = -\frac{20}{23}\Theta + \frac{2}{23}\sin 2\Theta \\ r_a = \frac{20 - 4\cos 2\Theta}{43 - 4\cos 2\Theta} b, \theta_a = \Theta \end{cases} \quad (4-12)$$

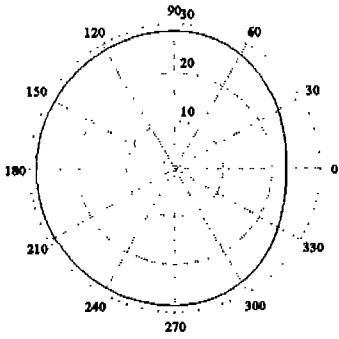


Fig. 4-5. Pitch curve of I-2 type (e gear)

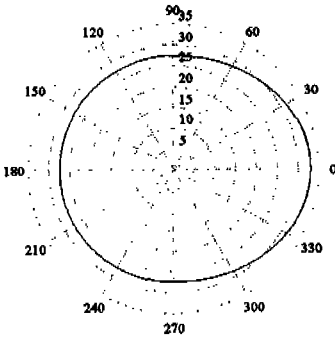


Fig. 4-6. Pitch curve of I-2 type (a gear)

피치 곡선의 압력각 α_p 의 최대값은 식 (3-7)을 이용해 구한 결과 12.1° 이다.

4-2-3. 기어의 제원

비원형기어의 주장을 구하는 식은 a 기어에 의해서 전 절과 마찬가지로 다음 식과 같이 된다.

$$\begin{cases} S_1 = \int_0^{\Theta} \sqrt{\frac{(20 - 4\cos 2\Theta)^2}{(43 - 4\cos 2\Theta)^2} + \frac{33856 \sin^2 2\Theta}{(43 - 4\cos 2\Theta)^4}} d\Theta \\ S_2 = \int_0^{\Theta} \sqrt{\frac{(26 + 2\cos 2\Theta)^2}{(49 + 2\cos 2\Theta)^2} + \frac{8486 \sin^2 2\Theta}{(49 + 2\cos 2\Theta)^4}} d\Theta \end{cases} \quad (4-13)$$

계산 결과, 전주장 S/b 는

$$S/b = S_1 + S_2 = 1.4711 + 1.6679 = 3.139 \text{ 이다.}$$

단, 중심거리 b 는 1로 계산한다. 기어제원을 표 4-2.에 나타낸다.

Table 4-2. The specification of gear for I-2 type

circular gear	d gear		c gear	
	module	1		
pressure angle	20°			
number of tooth	74	66		
radius of pitch curve	74mm	66mm		
distance between axes	70.0678mm			
addendum modification coefficient	0	0.1156		
non circular gear	circumference of pitch curve	S/b = 3.139		
	module	1		
	number of tooth	70		
	width of tooth	10mm		
distance between axes	76.0578mm			

4-3. III-1형 기구

4-3-1. 변위 곡선

변위곡선의 변위 기간에 싸이클로이드 곡선을 이용하고 비원형기어의 주기적凹凸의 수를 외기어에서 1, 내기어에서 2로 한다. 변위 곡선은 다음 식에 나타난다.

$$\begin{cases} 0 \leq \Theta \leq \Theta_s \text{ 일때: } \Phi = 0 \\ \Theta_s \leq \Theta \leq \Theta_H \text{ 일때} \\ \Phi = \frac{\pi(2-n)}{2\pi - n\Theta_s} (\Theta - \Theta_s) \\ \quad - \frac{2\pi - n\Theta_s}{2n\pi} \sin \frac{2n\pi}{2\pi - n\Theta_s} (\Theta - \Theta_s) \end{cases} \quad (4-14)$$

단, $\Theta_H = \frac{2\pi}{n}, \Phi_H = \frac{\pi(2-n)}{n}$

피치 곡선의 곡률 반경은
외기어에서는

$$\rho_c = \frac{n\{(1-\Phi')^2(n-1+\Phi')^2 + \Phi'^2\}^{3/2}b}{\{(n-1+\Phi')^2 \times [n(n-1+\Phi')^2(1-\Phi')^2 + 2n\Phi'^2 - (1-\Phi') \times \{2\Phi'^2(n-1+\Phi')\}]} \quad (4-15)$$

내기어에서는

$$\rho_d = \frac{n\{(1-\Phi')^2(n-1+\Phi')^2 + \Phi'^2\}^{3/2}b}{(n-1+\Phi')^3\{(n-1+\Phi')^2(1-\Phi')^3 + \Phi'^3(1-\Phi') + \Phi'^3\}} \quad (4-16)$$

단, $\Phi' = \frac{d\Phi}{d\Theta}$, $\Phi'' = \frac{d^2\Phi}{d\Theta^2}$, $\Phi''' = \frac{d^3\Phi}{d\Theta^3}$

출력축 변위각 Φ_H 를 양(+)으로 하면 식 (4-19)에서 n 은, $1 < n < 2$ 가 된다. 이 n 에 대하여 $\rho_{\min} > r_{cc}$ 되는 ρ_{\min} 와 Φ_H 를 구하면 $\Phi_H = \pi/6$ 가 된다. n 은 $7/12$ 가 되며, 이것과 식 (4-14)으로부터 Φ_H 는 $7\pi/6$ 가 된다. 입력 1주기의 $3/4$ 을 변위 기간으로 하고, $1/4$ 을 정지 기간으로 하면 변위 곡선은 다음과 같다.

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 \leq \Theta \leq \frac{7}{8}\pi \text{ 일때} \\ \Phi = \frac{4}{21}\left(\Theta - \frac{7}{16}\sin\frac{16}{7}\Theta\right) \\ \frac{7}{8}\pi \leq \Theta \leq \frac{7}{6}\pi \text{ 일때} \\ \Phi = \frac{\pi}{6} \end{array} \right. \quad (4-17)$$

변위 곡선을 Fig. 4-7.에 나타낸다.

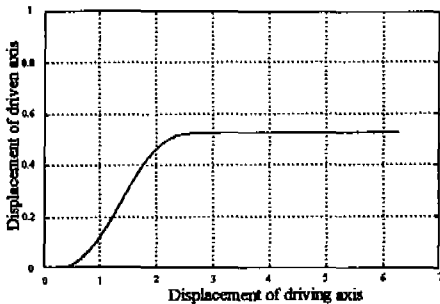


Fig.4-7. Displacement curve of III-1 type

4-3-2. 피치 곡선

변위 곡선은 $(7\pi/16 (1.374), \pi/12 (0.2618))$ 에서 점대칭이므로 Fig.4-7.에서 그 좌표축의 원점을 $(7\pi/16, \pi/12)$ 로 이동하면 다음 식이 얻어진다.

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{7}{16} \leq \Theta \leq \frac{7}{16}\pi \text{ 일때:} \\ \Phi = \frac{4}{21}\left(\Theta + \frac{7}{16}\sin\frac{16}{7}\Theta\right) \\ \frac{7}{16}\pi \leq \Theta \leq \frac{35}{48}\pi \text{ 일때:} \\ \Phi = \frac{\pi}{12} \end{array} \right. \quad (4-18)$$

외기어(c기어) :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{7}{16} \leq \Theta \leq \frac{7}{16}\pi \text{ 일때} \\ r_c = \frac{36}{19 + 4\cos\frac{16}{7}\Theta}b \\ \theta_c = \frac{17}{21}\Theta - \frac{1}{12}\sin\frac{16}{7}\Theta \\ \frac{7}{16}\pi \leq \Theta \leq \frac{35}{48}\pi \text{ 일때} \\ r_c = \frac{12}{5}b, \theta_c = \Theta - \frac{\pi}{12} \end{array} \right. \quad (4-19)$$

내기어(d기어) :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{7}{16} \leq \Theta \leq \frac{7}{16}\pi \text{ 일때} \\ r_d = \frac{17 - 4\cos\frac{16}{7}\Theta}{19 + 4\cos\frac{16}{7}\Theta}b, \theta_d = \frac{12}{7}\Theta \\ \frac{7}{16}\pi \leq \Theta \leq \frac{35}{48}\pi \text{ 일때} \\ r_d = \frac{7}{5}b, \theta_d = \frac{12}{7}\Theta \end{array} \right. \quad (4-20)$$

여기서 피치 곡선의 압력각 α_p 는, 식 (3-7)로부터 α_p 의 최대값은 30.7° 이다.

4-3-3. 기어의 제원

cutter의 제원은, $m = 1mm$, $r_{cc} = 12.5mm$, $Z_{cc} = 25$, $\alpha_{cc} = \alpha_0 = 20^\circ$ 로 가정한다.

i) 식 (3-9)과 (3-10)으로부터

$$\rho_d \geq 18.69mm, Z_d \geq 37$$

ii) 식 (3-11)로부터

$$\rho_d - r_{cc} \geq 3.79mm, Z_d \geq 33$$

iii) 식 (3-12)로부터

$$\rho_d - r_{cc} \geq 7.94mm, Z_d \geq 41$$

iv) 식 (3-17)로부터

$$\rho_d \geq 16.5812mm, Z_d \geq 33$$

비원형 외기어의 피치 곡선의 비원 부의 주장 S_1 은 다음 식으로부터 구한다.

$$\frac{S_1}{b} = \int_{\frac{3}{4}\pi}^{\frac{3}{4}\pi} \frac{17 - 4\cos\frac{4}{3}\theta_c}{19 + 4\cos\frac{4}{3}\theta_c} d\theta_c \quad (4-21)$$

이상으로부터 $S_1/b = 4.5080$ 이 얻어진다. 원호 부에 서는 식 (4-19)로부터 $r_c = 1.4b$, $\theta_c = \pi/2$ 이기 때문에 그 주장 $S_2/b = 2.1991$ 가 된다. 따라서 전주장 S_c 의 값은 $6.7071b$ 가 되며 다음의 관계식으로부터 제원이 결정되어진다. 즉 $m\pi Z_c = S_c = 6.7071b$ 여기서 $m = 1$, $Z_c = 54$ 라고 하면 $b = 25.2935mm$ 가 되며 이들의 값에 각종 간섭은 생기지 않는다. 한편, 내기어의

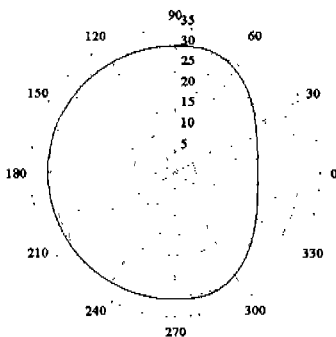


Fig.4-8. Pitch curve of III-1 type (c gear)

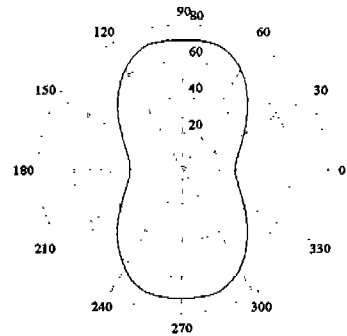


Fig.4-9. Pitch curve of III-1 type (d gear)

주장 S_d 는 $2S_c$ 이며, $Z_d = 108$ 이 된다. 표. 4-3에 기어와 기구의 제원을 표시했다.

Table 4-3. The specification of gear for III-1 type

	e gear		a gear	
	circular gear	module		
1.0				
pressure angle				
20°				
number of tooth		80	130	
radius of pitch circle		70mm	130mm	
distance between axes		25.2935mm		
addendum modification coefficient		0	0.587	
non circular gear	c gear		d gear	
	circumference of pitch curve		$S_c/b=6.707$	$S_d/b=13.414$
	module			
	1.0			
	number of tooth	54	108	
	width of tooth		10mm	
distance between axes		25.2935mm		

4-4. 곡률 및 모듈의 변화

앞에서 설계된 세가지 유형의 모듈, 중심 거리, 잇수 등의 관계를 다음 Fig. 4-10, 11에 나타냈다. 모듈이 1~5 까지 변화할때의 중심 거리와 잇수의 관계를 나타낸 그림이다. Fig. 4-13은 1~3.5의 값을 갖는 잇수비의 변화에 따른 세가지 유형의 기구들의 곡률을 나타낸 그림이다. 세가지 유형의 공통된 잇수비의 값은 1.615~1.935 사이임을 알 수 있다. Fig. 4-14는 잇수를 0~100까지 변화를 주면서 곡률 반경의 변화를 살표본 그림이다. 기어의 일반적인 범위인 잇수 40~80까지의 곡률반경의 범

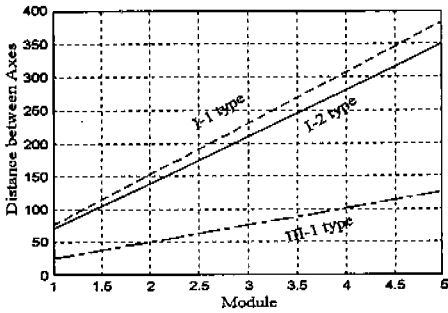


Fig. 4-10. Distance between axes on the change of module

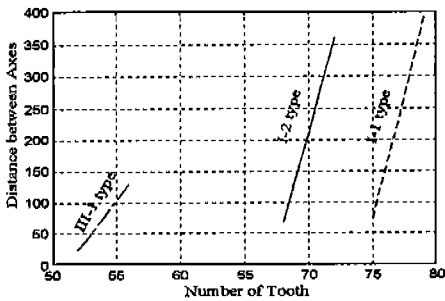


Fig. 4-11. Distance between axes on the change of tooth number

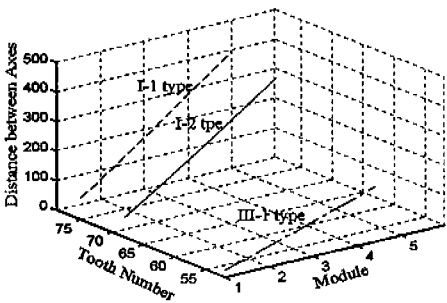


Fig. 4-12. Distance between axes on the change of module, tooth number

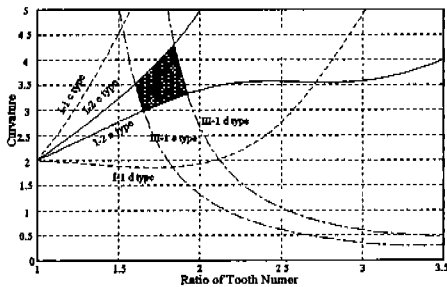


Fig. 4-13. Curvature on the change for ratio of tooth number

위는 I-1형 기구에서 13.746(mm), I-2형 기구에서 11.332(mm), III-1형 기구에서는 15.062(mm)를 얻었고 본연구에서 설계한 각 비원형기어의 곡률반경의 한계는 I-1형기구에서 14.240(mm), I-2형 기구에서 12.988(mm), III-1형 기구에서는 외기어일 경우 23.341(mm), 내기어일 경우에는 10.377(mm)를 얻었다.

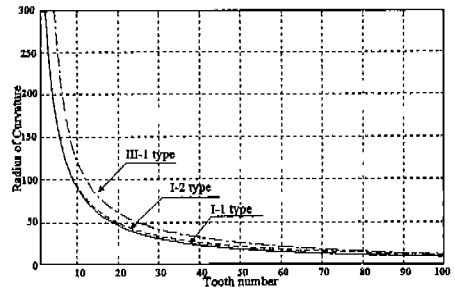


Fig. 4-14. Radius of curvature on the change for the ratio of tooth number

4-5. 고찰

Fig. 4-15.는 요동운동(Tremble movement)을 기본 운동으로 했을때의 각각의 운동을 나타낸 그림이다. III형 기구는 입력축에 의해 회전되는 중심거리상의 유성기어축의 주위를 유성기어가 자전하고, 이것과 맞물려있는 내기어가 출력축에 직결하고 있기 때문에 I형 기구와 비교해서 보다 소형이고 고속 회전이 가능한 기구를 얻을수

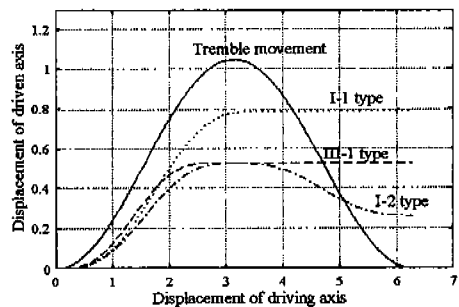


Fig. 4-15. Displacement curve of each equipment

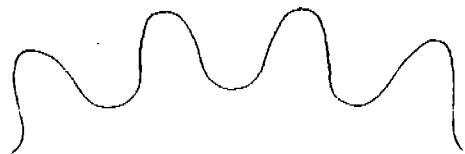


Fig. 4-16. Tooth profile of Oval type gear

있음을 보여주고 있다. 비원형기어에서 피치곡선의 주기적 요철의 수를 증가시키면 입력 1주기의 출력축의 요동 또는 간차회전운동(일시 정지했다가 다시 회전하는 운동)의 회전수를 증가시킬수 있겠지만 그 경우에는 피치곡선상의 동경의 변화가 크게 되고 또한 곡선상의 임의의 1점에서의 곡률 반경이 작아지게 되므로 비원형 내기어를 절삭하는 경우에 커터 지름이 작게된다. 이것은 커터를 제작하는데에 어려움을 주게 된다.

5. 결 론

부등속 회전 기구에 사용된 비원형기어의 설계시 고려해야할 압력각, 모듈, 잇수의 비, 중심거리, 곡률 등의 관계를 고찰하고 그 설계시에 고려해야할 피치곡선과 이의 간섭 그리고 절삭시의 제약조건식들에 대하여 비교 검토하고, 연구한 결과 다음과 같은 결론을 얻었다.

- (1) 공구 압력각과 피치 압력각의 합인 맞물림 압력각을 고려하고, 각 기어의 변위 곡선과 피치곡선등을 고려한 피치 압력각의 범위는 $12.1^{\circ} \sim 30.7^{\circ}$ 이다.
- (2) 설계한 세가지 유형의 내기어에서의 적절한 잇수비의 범위는 1.6 ~ 1.935 사이임을 얻었다.
- (3) 현재 유량계에 사용되고 있는 oval형기어(이심률:0.25, 잇수: 54, 45개)의 압력각을 측정해본 결과 본논문에서 검토한 설계범위내에 있음이 확인되었다.
- (4) 비원형기어의 일반적인 잇수 범위인 40 ~ 80 까지의 최소 곡률반경의 범위는 I-1형 기구에서 13.746(mm), I-2형 기구에서 11.332(mm), III-1형 기구에서는 15.062(mm)를 얻었고 본연구에서 설계한 각 비원형기어에 있어서의 곡률반경의 한계는 I-1형기구에서 14.240(mm), I-2형기구에서 12.988(mm), III-1형 기구에서는 외기어일 경우 23.341(mm), 내기어일 경우에는 10.377(mm)를 얻었다.

참 고 문 헌

1. Hideo KATORI, "Development of the CAD/CAM Systems for Non-Circular Gears", 日本 機械學會 論文集, 昭和 56年.
2. 山崎 陸, "비원형치차의 설계·제작과 그 응용", 日本 機械學會 論文集 第 29 卷 第 11 號, 1985 年.
3. 森田, 笠原, 日立評論, 35-2, pp.63, 1953年.
4. 笠原, 日立評論, 35-2, pp.57, 1953年.
5. 笠原, 日立評論, 37-2, pp.89, 1955年.
6. 石田, 日本 機械學會 論文集, 15-W-15, pp.80, 1949年.
7. H.G. Golber, Trans. ASME, pp.223, 1939.
8. H.E. Peyrebrune, Machine Design, pp.185, December, 1953.
9. Yoshiaki YOKOYAMA, Kiyoshi OGAWA, Shin KUREBAYASHI, "비원형 유성치차기구의 설계", 日本 機械學會 論文集 第 48 卷, 第 428 號, 昭和 56年.
10. 고윤호, "비원형 타원계 엽형기어의 이심률 변화에 따른 특성에 관한 연구", 정밀공학회 추계 학술대회, 1994.
11. 유명섭, "이심률 변화에 따른 타원계 엽형기어의 진동 특성에 관한 연구", 정밀 공학회 추계 학술대회, 1995년.
12. 金博允, "기어 편람", 기어 편람 편찬위원회, 技多利 出版社, pp. 229, 235~237, 269, 549, 660, 813, 1052.
13. Peter Lynwander, "Gear Drive systems(Design & Application)", American Lohmann co, 1983.